Guía 6

Aprendamos algo más sobre los ángulos

Indicadores de Desempeño

conceptual
Establece las clasificaciones que se le pueden hacer a un ángulo.

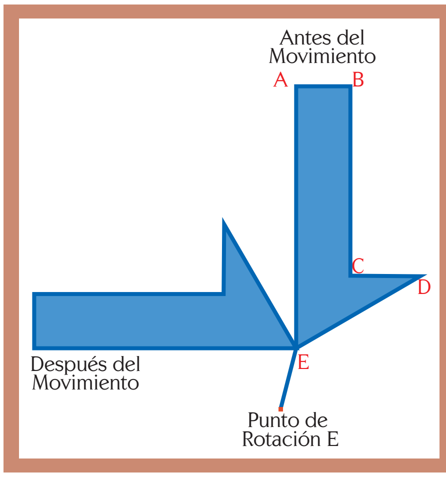
Procedimental
Encuentra soluciones a diferentes situaciones planteadas a través de la utilización del sistema de medida sexagesimal.

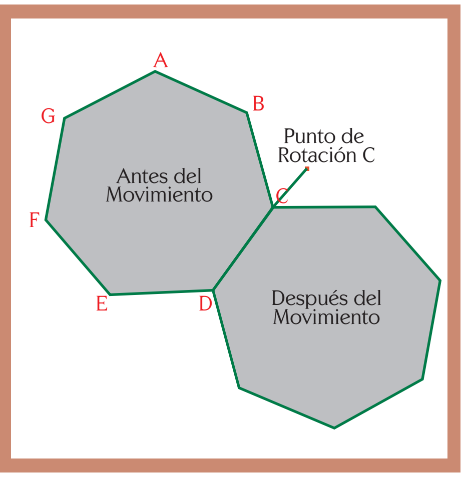
Actitudinal
Valora la importancia de los instrumentos de medida y de su correcta utilización.

Vivencia

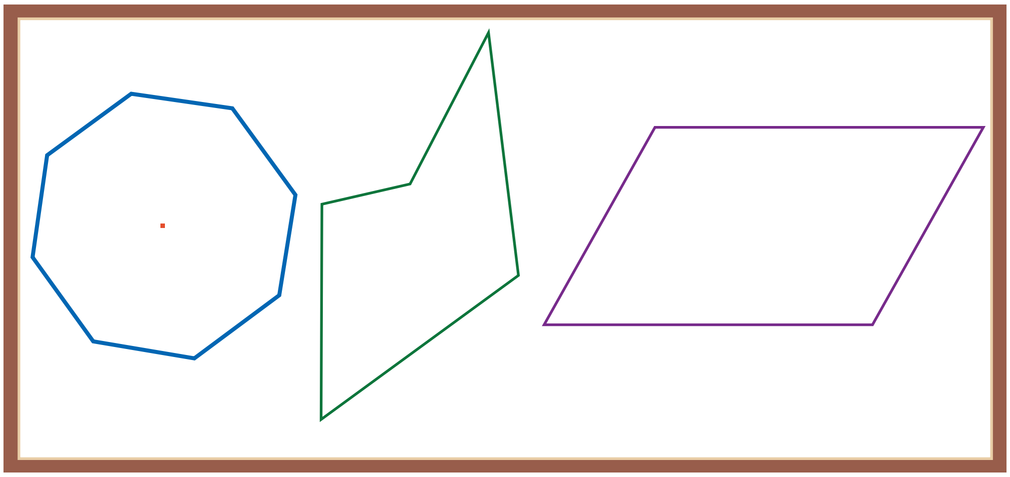
TRABAJO INDIVIDUAL

1. *Analizo cada imagen y determino el ángulo de giro de la transformación geométrica que se muestra de la figura:*





2. Determino en los siguientes polígonos con color rojo los ángulos internos y con color verde los ángulos externos. Clasifico los polígonos según el criterio de equiángulos y no equiángulos.



3. Recuerdo que la rotación de la tierra determina el día y la noche.

   a. ¿Cuántos grados debe rotar la tierra para que transcurra una hora?

   b. ¿Cuántos grados rota la tierra para que trascurran 24 horas?

TRABAJO POR PAREJAS

4. Comparamos los procedimientos y corregimos si es necesario.

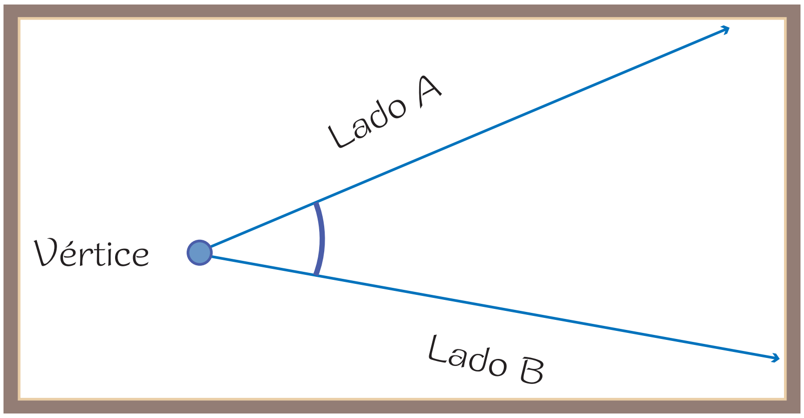
5. Invitamos al profesor para que revise las actividades desarrolladas.

B Fundamentación Científica

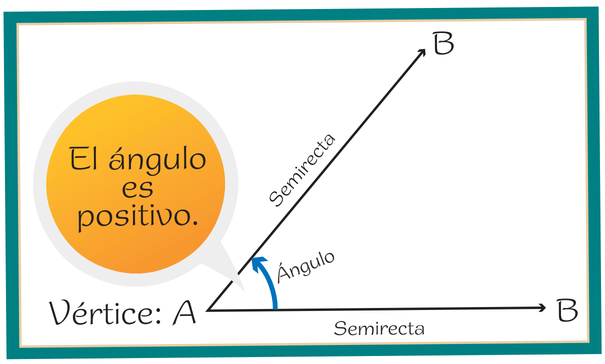
TRABAJO EN EQUIPO

1. Le solicitamos respetuosamente a un integrante del equipo que lea el siguiente texto y consignamos en el cuaderno los aspectos más importantes.

Un ángulo se define como una parte del plano que está limitada por dos semirrectas o rayos que tiene el mismo origen.

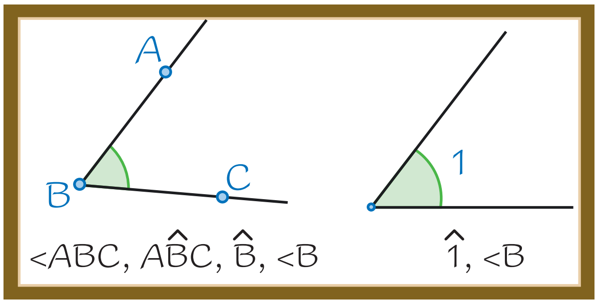


Otra manera de entender el ángulo es el giro de una semirrecta alrededor de un punto fijo.Este giro se caracteriza porque establece una amplitud y dirección.; es decir, se considera negativo si el giro es en el sentido de las agujas del reloj y positivo en caso contrario.



Es importante aclarar que las semirrectas se le llaman lados de un ángulo y el punto de origen común se llama vértice. Los símbolos que se utilizan para notar un ángulo son: <, o ˆ acompañados por letras del alfabeto griego, letras mayúsculas del alfabeto latino o números.

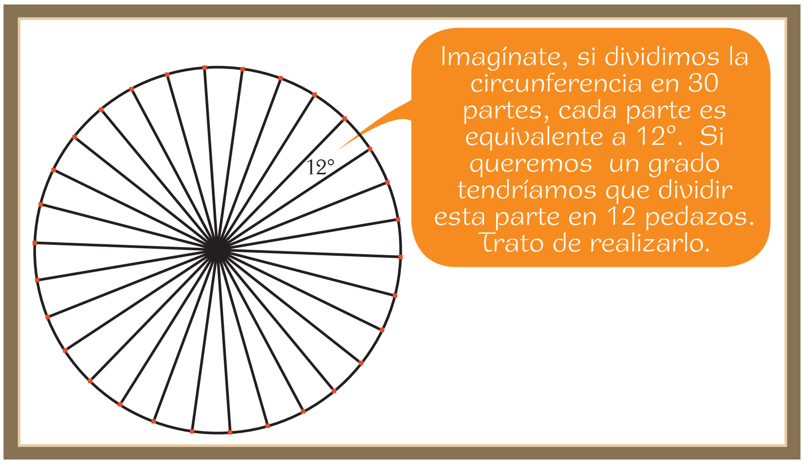
Ejemplos:



Medida de ángulos

De la misma manera en que se pueden medir la longitud de un segmento, es posible medir del ángulo su amplitud. Uno de los sistemas que se utiliza es el ***sistema sexagesimal.***

Este sistema consiste en dividir la circunferencia en 360 partes y cada una ellas se denomina grados(°).
Por ejemplo, una amplitud de 360° corresponde a una vuelta completa o un giro cuyo inicio y final coinciden.



Si se requiere más precisión, se divide cada uno de los grados en 60 partes y cada parte se denomina **minuto**. Para simbolizar un minuto se escribe 1’

$$1° = 60'$$

Asímismo, cada minuto se divide en 60 partes y cada parte se denomina **segundo**. Para simbolizar un segundo se escribe 1’’

$$1' = 60''$$

Podemos expresar una medida angular como:
<A= 30° 15’ 45’’ y se lee *“el ángulo mide treinta grados, quince minutos y cuarenta y cinco segundos”*

A la vez, se expresa la medida del ángulo en términos de una de las unidades como grados, minutos o segundos.

Ejemplo 1
Expresamos la medida del ángulo a segundos:
<A= 30º 15' 45''

Paso 1: pasamos los 30º a segundos.
Para ello, utilizamos lo aprendido de proporcionalidad con relación al método 3, que se basa en establecer una razón:

$$30^\circ \text{ x } \frac{60'}{1^\circ} = 1800' \qquad 1800' \text{ x } \frac{60''}{1'} = 108000''$$

Es decir que 30º es lo mismo que 108 000''.

Paso 2: pasamos 15' a segundos:

$$15' \text{ x } \frac{60''}{1'} = 900''$$

Es decir que 15' es lo mismo que 900''

Paso 3: sumamos los segundos que tenemos:

108 000''+ 900'' + 45'' = 108 945''
<A= 30º 15' 45'' esta medida es equivalente a que <A= 108 945'', entonces:

30º 15' 45'' = 108 945''

Ejemplo 2
Expresamos en minutos, grados y segundos la medida del ángulo.
<B = 125 458''

Paso 1: pasamos los 125 458 segundos a minutos.

$$\begin{array}{r|l} 125458'' & 60 \\ \hline 545 & 2090' \\ 58 & \end{array}$$

Los segundos que sobran

El cociente es el número de minutos que se obtiene de 125458''.

Paso 2: pasamos los 2 090' minutos a grados.

$$\begin{array}{r|l} 2090' & 60 \\ \hline 290 & 34 \\ 50 & \end{array}$$

Los minutos que sobran

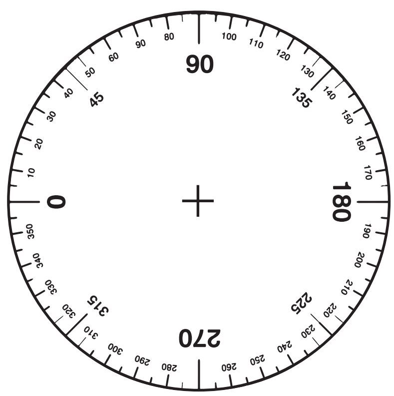
El cociente es el número de grados que se obtiene de 2090'.

<B = 125 458’’ esta medida es equivalente a <B = 34° 50’ 58”.
Entonces 125 458’’ = 34° 50’ 58”.

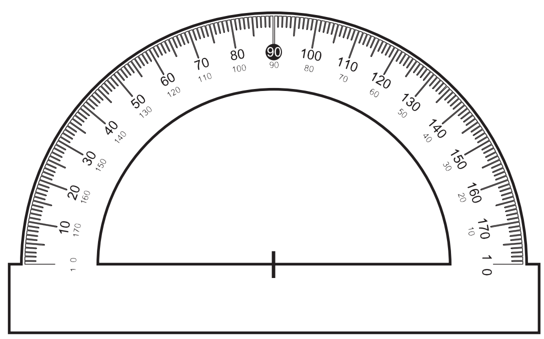
Con estas medidas de ángulos se pueden realizar las operaciones de adicción y sustracción. Estudiamos los siguientes ejemplos y observamos que se cambia cada unidad por 60:

Ejemplo 3	Ejemplo 4
Si <A= 30° 40’ 52” y <B= 10° 16’ 46” Entonces <A + <B 30° 40’ 52” × 10° 16’ 46” 40° 56’ 98” Como 98”= 60” + 38” = 1’ + 38” Es decir, que el resultado es: 40° 57’ 38”	Si <A= 42° 30’ 12” y <B= 11° 15’ 21” Entonces <A – <B 42° 30’ 12” –11° 15’ 21” Como 12” no le puedo quitar 21”, necesito cambiar un minuto a segundos, entonces se tiene que: 42° 30’ 12” = 42° 29’ 72” Luego, la resta queda: 42° 29’ 72” –11° 15’ 21” 31° 14’ 51” Es decir, que el resultado es: 31° 14’ 51”

El instrumento más utilizado para medir ángulos es el **transportador**. Existe en el mercado de 360° y de 400°. El que más se utiliza es el de 360° y el semicírculo de 180°.

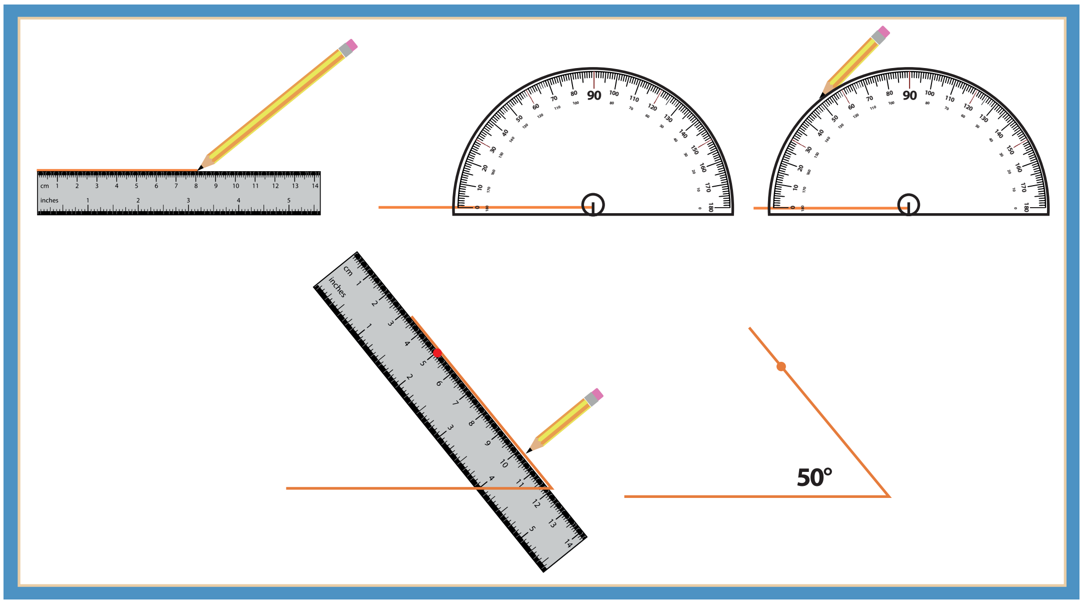


Tranportador de 360°.

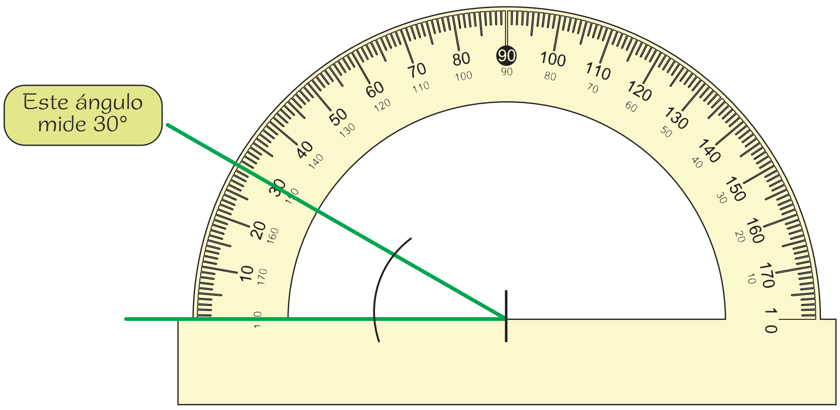

Tranportador de 180°.

El transportador se emplea para:

a. Trazar un ángulo en grados, se sitúa el centro del transportador en lo que será el vértice del ángulo y se ubica cero (0°) sobre el lado inicial. Luego se marca el ángulo con la medida deseada y se traza el lado final del ángulo desde el vértice hasta el punto marcado.



b. Medir un ángulo, se alinea el lado inicial del ángulo con 0° del transportador y se ubica el lado final del ángulo sobre el transportador, posteriormente, se lee el grado que indica.

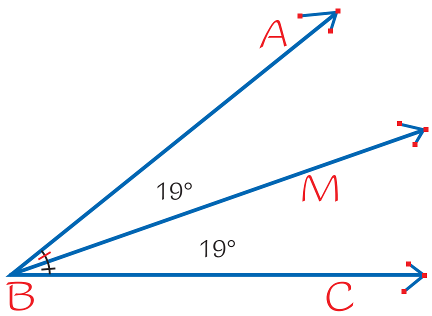


Congruencia de ángulos

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos congruentes.

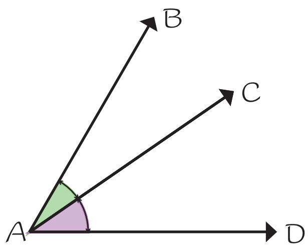


<ABC mide 38° y la bisectriz es la semirrecta $\overleftrightarrow{BM}$ que genera dos ángulos congruentes <ABM = <MBC

Clasificación de los ángulos

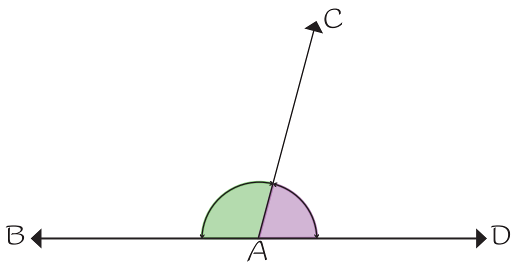
a. Según su posición

Consecutivos: Dos ángulos consecutivos son aquellos que comparten un vértice y un lado.



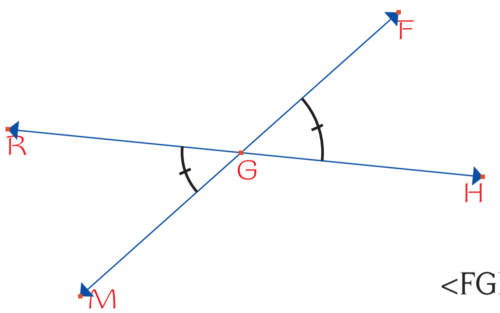
<BAC es consecutivo a <CAD

Adyacentes: Son dos ángulos consecutivos y los lados no comunes forman una línea recta.



<BAC es adyacente a <CAD

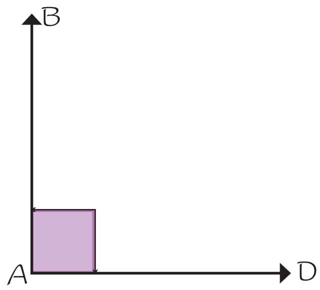
Opuestos por el vértice: Son dos ángulos que comparten el mismo vértice y los lados de un ángulo son las prolongaciones de los lados del otro ángulo.



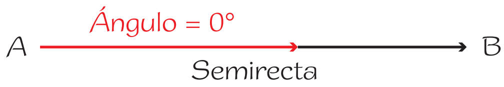
<FGH es el ángulo opuesto de <RGM

b. Según su medida

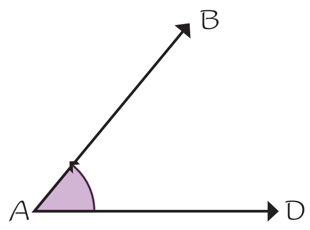
Recto: Un ángulo recto es aquel que mide 90°.



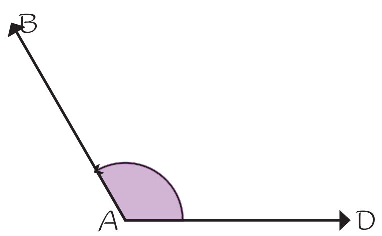
Nulo: Es un ángulo que mide 0°.



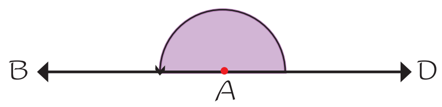
Agudo: Es un ángulo que mide menos de 90° y más de 0°.



Obtuso: Es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

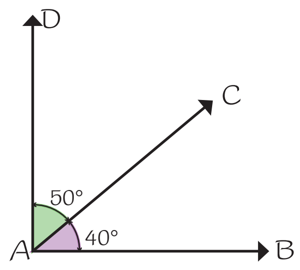


Llano: Es un ángulo que mide 180°.



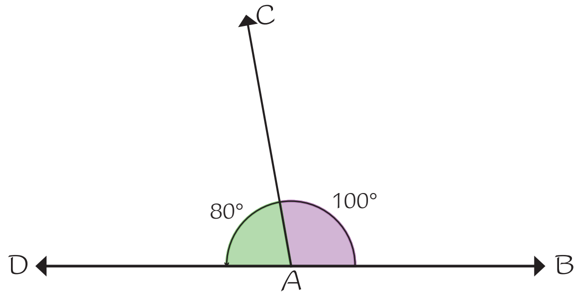
c. Según relaciones de medidas.

Complementarios: Son dos ángulos que al sumar sus medidas da 90°.



$<DAC + <CAB = 90°$

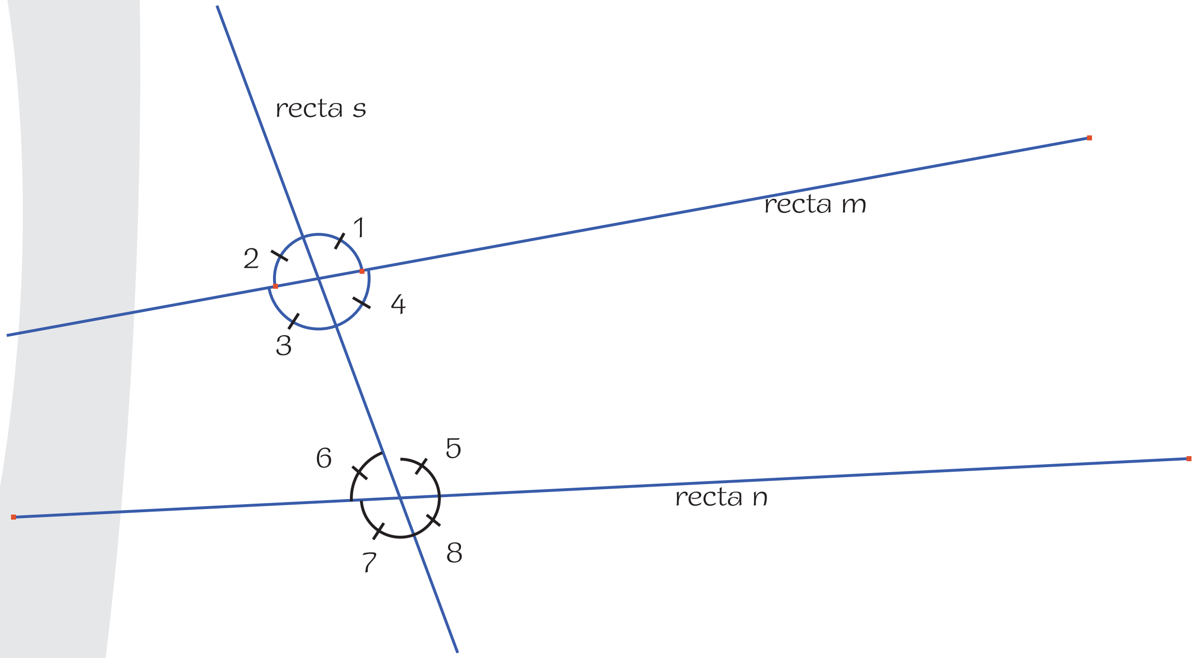
Suplementarios: Son dos ángulos que al sumar sus medidas da 180°.



<DAC+ <CAB = 180°

d. Ángulos entre dos rectas cortadas por una tercera

Cuando se tiene dos rectas que la corta una recta secante, se determinan ocho ángulos. Estos ángulos reciben nombres especiales según la posición que tienen,



Colaterales: Son los que están al mismo lado de la secante. De acuerdo a la figura serían: $\hat{1}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{8}$ por un lado y $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ y $\hat{7}$ por el otro.

Internos: Son los que están entre las rectas. De acuerdo a la figura serían: $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ y $\hat{6}$.

Externos: Son los que están fueras de las rectas. De acuerdo a la figura serían $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ y $\hat{8}$.

Existen parejas de ángulos que se establecen a través de las siguientes condiciones:

Alternos internos: Son parejas que cumplen las condiciones a) no son colaterales, b) son internos y c) no son adyacentes. De acuerdo a la figura serían: $\hat{3}$ y $\hat{5}$; y, $\hat{4}$ y $\hat{6}$

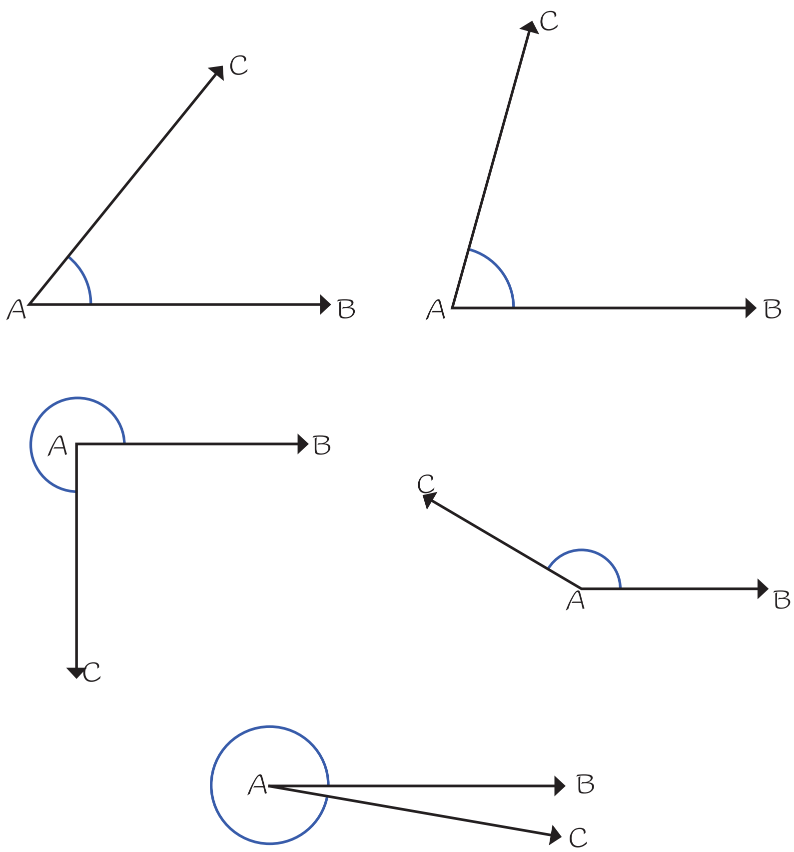
Alternos externos: Son parejas que cumplen las condiciones: a) no son colaterales, b) son externos y c) no son adyacentes. De acuerdo a la figura serían:
$\hat{2}$ y $\hat{8}$; y, $\hat{1}$ y $\hat{7}$

Correspondientes: Son parejas que cumplen las condiciones a) son colaterales, b) uno externo y otro interno y c) no son adyacentes. De acuerdo a la figura serían: $\hat{1}$ y $\hat{5}$; y, $\hat{4}$ y $\hat{8}$; $\hat{2}$ y $\hat{6}$; y, $\hat{3}$ y $\hat{7}$

C Ejercitación

TRABAJO POR PAREJAS

1. *Medimos los siguientes ángulos utilizando el transportador y luego los dibujamos en el cuaderno*



2. Dibujamos los siguientes ángulos utilizando el transportador y luego graficamos su correspondiente bisectriz.

   a. 30°

   b. 45°

   c. 170°

   d. 120°

   e. 210°

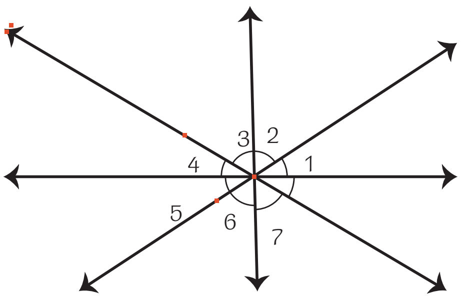
3. Resolvemos las siguientes preguntas:

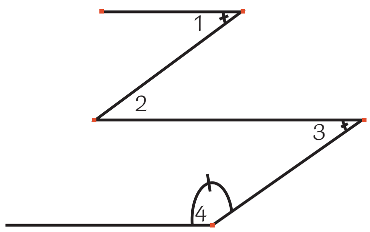
   a. ¿Cuántos giros completos se deben dar para llegar a 1 080°?

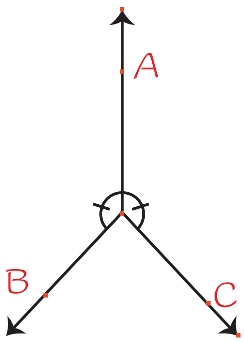
   b. ¿Cuántos giros completos y cuántos grados son necesarios para llegar a 450°?

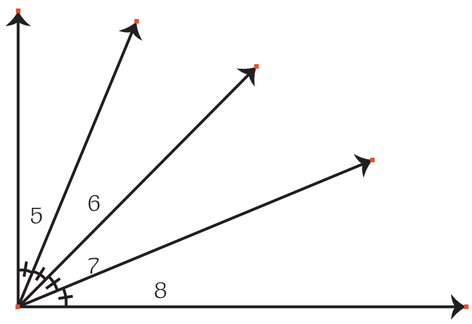
   c. Construimos un ángulo de 150°, luego construimos sobre el último lado un ángulo de 270° ¿Cuántos grados se avanzó en total?

4. Determinemos cuáles ángulos son adyacentes, congruentes y consecutivos en cada una de las figuras:









5. Completamos los siguientes enunciados:
   a. Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios y $\hat{\alpha}$ = 40° entonces $\hat{\beta}$= __________.
   b. Si $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios y $\hat{\alpha}$ = 120° entonces $\hat{\beta}$= __________.
   c. Si $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son adyacentes y $\hat{y}$ = 75° entonces $\hat{z}$= __________.

6. Invitamos al profesor con el fin de que evalúe las actividades desarrolladas.

D Aplicación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Leemos atentamente las siguientes situaciones y las desarrollamos en el cuaderno

   a. Daniel invitó algunos de sus compañeros para celebrar su cumpleaños. Sus padres le compraron un pastel de forma circular y Daniel desea calcular el valor del ángulo central que debe tener cada pedazo, de tal manera que se pueda partir en partes iguales.

Completamos la siguiente tabla teniendo en cuenta la cantidad de compañeros que asisten a su cumpleaños y el ángulo que debe tener cada porción de pastel.

Compañeros	4	5	6	9	10
Ángulo					

   b. ¿Cuántos grados avanzó el minutero del reloj? si:
   - ✓ Cambió de 15 minutos a 45 minutos.
   - ✓ Avanzó de 5 a 55 minutos.
   - ✓ Pasó de 25 a 40 minutos.
   - ✓ Avanzó de 45 minutos a 30 minutos.
   - ✓ Cambió de 10 a 15 minutos.

2. Buscamos en internet sobre:

   a. Los instrumentos: goniómetro y transportador de 400°. ¿Cómo y para qué se utilizan?

   b. Páginas web que nos permitan interactuar sobre los ángulos y encontrar algunas propiedades. Las anotamos en el cuaderno.

3. De acuerdo a las medidas de los ángulos:

<A= 130° 5’ 36”
<B= 25° 34’ 54”
<C= 50° 54’ 20”,

Realizamos las siguientes operaciones:

<A + <B	<A + <C	<B + <C
<A – <B	<A – <C	<C – <B

4. Socializamos con nuestro profesor las actividades desarrolladas para que las evalúe.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Leemos atentamente la siguiente información y anotamos los aspectos más importantes en el cuaderno.

$$S = 180° \times (n - 2)$$

La relación que existe entre un polígono de n lados y la suma S de los ángulos interiores es
Donde S es el valor de la suma y n es el número de lados del polígono.

Así, para un triángulo, sería:
S=180° X (3–2) = 180° X 1= 180° .
La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.

Para un cuadrilátero sería:
S=180° X (4–2) = 180° X 2= 360° .
La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es 360°.

Recordemos que un polígono regular es equiángulo y equilátero, con la anterior fórmula podemos determinar cuánto vale la suma y el valor de cada ángulo.

a. Determinamos el valor de la suma de los ángulos internos y el valor de cada uno en los siguientes polígonos:

- ✓ Pentágono regular.
- ✓ hexágono regular.
- ✓ Octágono regular.
- ✓ Decágono regular.

2. Realizamos las siguientes construcciones geométricas con las indicaciones dadas. Medimos la longitud de los lados y de los ángulos de cada una:

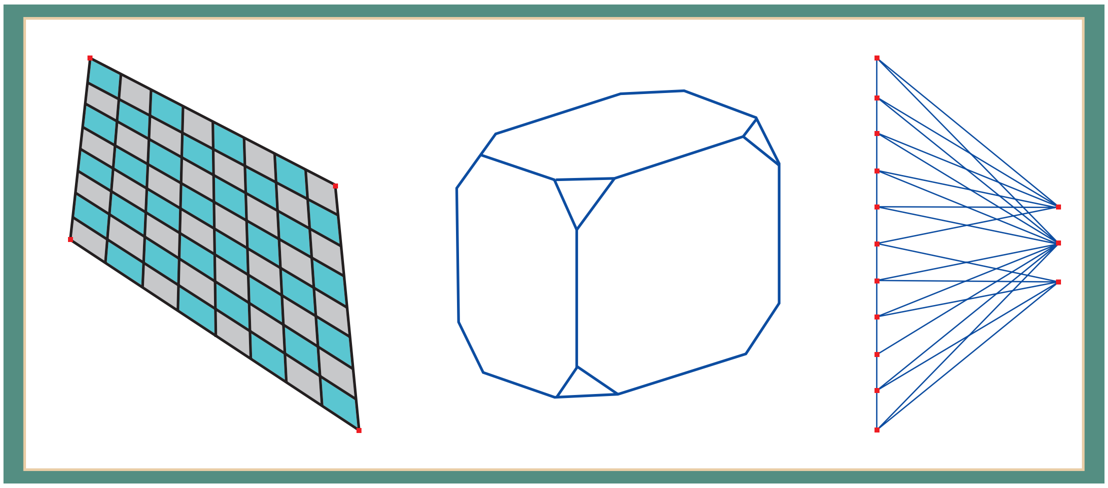
   a. Un cuadrilátero en el que dos de sus ángulos opuestos midan 80°.

   b. Un pentágono regular en el que cada uno de sus lados mida 4 centímetros.

   c. Un triángulo equilátero en el que cada lado mida 6,5 cm.

   d. Un hexágono regular en el que cada uno de sus lados mida 2,5 centímetros.

   e. Realizamos las siguientes construcciones en un octavo de cartulina:

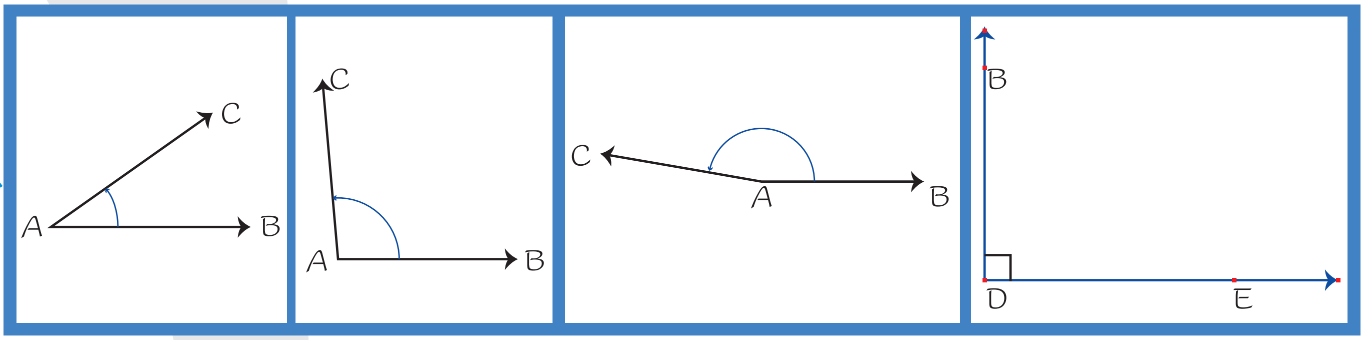


3. Compartimos con el profesor los ejercicios desarrollados.

Evaluación por competencias

1. El ángulo que es agudo es:

A. B. C. D.



2. El enunciado que es correcto es:

A. Una semirrecta mide 50 cm.

B. Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

C. Dos ángulos suplementarios miden 90°.

D. Dos ángulos adyacentes son alternos.

2

3. Determino si los siguientes enunciados son falsos (f) o verdaderos (v). Justifico la respuesta.

A. Todos los ángulos consecutivos forman un ángulo recto. ( )

B. Todos los ángulos adyacentes forman un ángulo llano. ( )

C. Todos los ángulos adyacentes son suplementarios. ( )

D. Todos los ángulos adyacentes son complementarios. ( )

3

4. Respondo las siguientes preguntas y las justifico:

A. Si se traza la bisectriz de un ángulo llano, ¿qué clase de ángulos se forman?

B. Si se tienen dos rectas paralelas que las corta una secante, ¿cuáles ángulos son congruentes?

C. ¿Cuántos ángulos rectos se pueden obtener de un ángulo de 360°?

4

5. Hallo el suplemento de la suma de los <A + <B, si: <A = 43° 16’ 23” y <B=40° 8’ 6”

5

Glosario

- **Latino:** Perteneciente o relativo a la lengua latina.
- **Griego:** Se dice de la lengua indoeuropea hablada en Grecia y áreas vecinas
- **Sexagesimal:** Se dice del sistema de contar o de subdividir de 60 en 60.
- **Segundo:** Unidad de tiempo en el Sistema Internacional, equivalente a la sexagésima parte de un minuto de tiempo.
- **Minuto:** Tiempo que equivale a 60 segundos.
- **Grado:** Cada una de las 360 partes iguales, a veces 400, en que puede dividirse la circunferencia. Se emplea también para medir los arcos de los ángulos.
- **Hora:** Tiempo que equivale a 60 minutos; es decir, 3.600 segundos. Es lo que recorre la tierra cada 15° de rotación del día .

Bibliografia

Bressan, A. M.; Costa de Bogisic (1996). Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas. Consejo Provincial de Educación de Río Negro, documento de la Secretaría Técnica de Gestión Curricular, área Matemática. Recuperado de www.educacion.rionegro.gov.ar

Centro para la Innovación y desarrollo de la educación a distancia. CIDEAD (s.f). Actividades de Eso. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/1quincena11/1quincena11_actividades.pdf

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (DRAE). Recuperado de http://www.rae.es

Ejercicios de perspectiva Isométrica. Recuperado de www.educacionplastica.net

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D. y Ruiz, F. (2003). Geometría y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Impact Mathematics. Course 2. Mac Graw Hill Companies. Recuperado de http://www2.lhric.org/poCantico/math/Course_2/chap08-s.pdf

Ponce, H. (2000): Enseñar y aprender matemática. Propuestas para el segundo ciclo. Buenos Aires: Editorial Novedades Educativas.