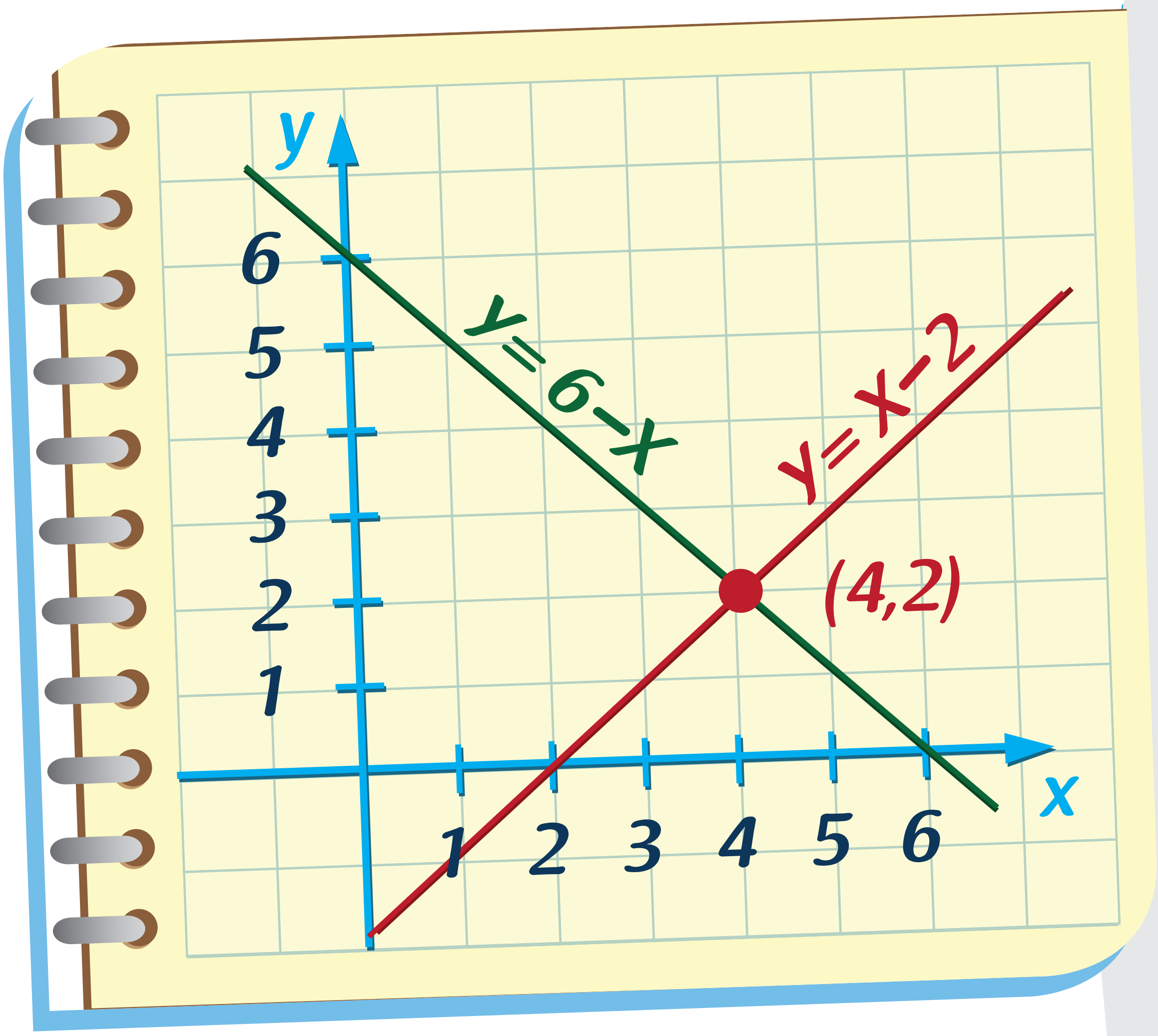
Guía 5

Avancemos en las ecuaciones lineales para resolverlas



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Identifica las propiedades de equivalencia en la solución de ecuaciones lineales.

Procedimental

- Resuelve problemas con ecuaciones lineales.

Actitudinal

- Demuestra aprecio y valora las posibilidades que ofrece la matemática a situaciones cotidianas.

A

Vivencia

TRABAJO EN PAREJAS

1. Con un compañero, recordamos lo que conocemos acerca de las operaciones entre números reales y ecuaciones. Respondemos:

    a. ¿Qué es una igualdad? ¿Qué es una ecuación? ¿Qué tipo de ecuaciones hay? Podemos consultar en los libros que se encuentran ubicados en el CRA o en un buscador de internet y realizamos un mapa conceptual en una cartelera, y después lo presentamos a nuestros compañeros.

    b. Resolvemos:

    ✓ Encuentro dos números cuya suma sea 12 y su diferencia sea 2.

    ✓ Si la suma de dos números es 25 y uno de los números es 7, ¿cuál es el otro número?

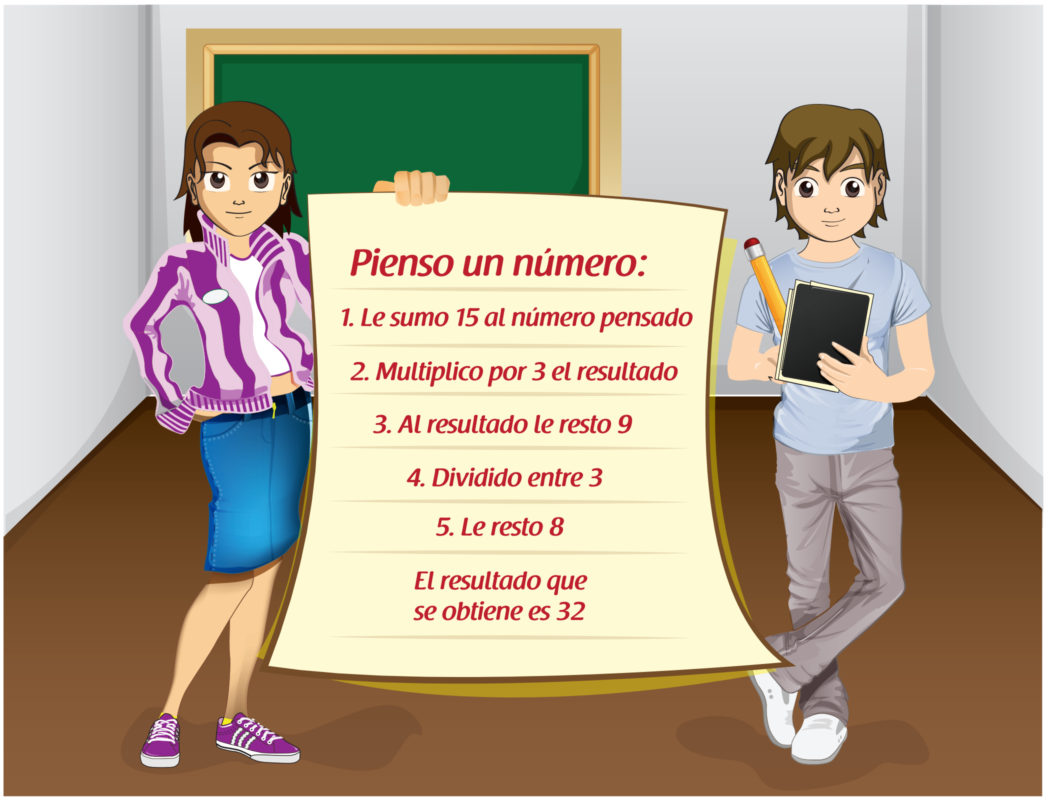
    ✓ Por cada dos pelotas azules hay una roja. Si hay 41 pelotas rojas, ¿cuántas pelotas azules hay?

    ✓ Si Miguel dura un día pintando 3 metros de pared, ¿cuántos días necesitará para pintar 72 metros?

2. Escribimos en el cuaderno 5 ejemplos de ecuaciones y describimos sus características para que sean ecuaciones.

TRABAJO INDIVIDUAL

3. Realizo la siguiente situación en mi mente y luego la propongo al compañero con el que estoy trabajando:



a. Respondo: ¿Cuál fue el número que pensé y cuál el que mi compañero pensó?

b. Comparamos el procedimiento empleado por cada uno y sacamos una conclusión de ello.

c. Planteo una ecuación del problema planteado y la consigno en mi cuaderno.

4. Escribo cada uno de los siguientes enunciados como una ecuación:

a. Un número más su quinta parte es igual a 12.
b. Un número par más 5.
c. La tercera parte de $ 5 000.
d. El perímetro de un cuadrado es 18 metros y la base es el doble de la altura.
e. La suma de dos números es 120.
f. Se ha recorrido la séptima parte del camino y nos falta por recorrer 15 km.
g. Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20.
h. En una familia, la madre gana el triple que el padre y entre los dos ganan mensualmente $2 800 000.
i. Cinco menos tres veces un número.
j. La suma de 3 y 5 dividida entre y.

5. Invitamos al profesor para mostrarle los resultados y le solicitamos evaluar la actividad.

TRABAJO EN EQUIPO

6. Proponemos a nuestros compañeros de equipo 10 ejercicios de adivinar números como el siguiente: “Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20, ¿cuál es el número?”

7. Presentamos al profesor las actividades realizadas y le pedimos que evalúe nuestro trabajo.

B Fundamentación Científica

TRABAJO EN EQUIPO

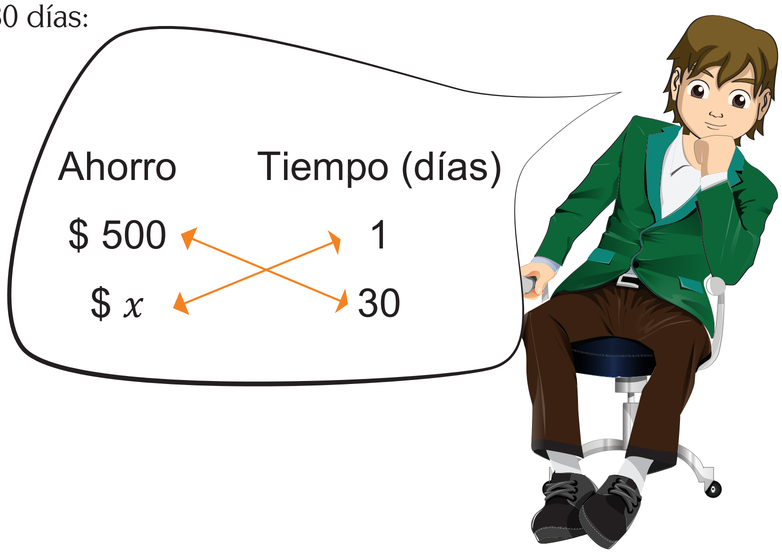
1. Asignamos roles y le solicitamos respetuosamente al compañero indicado realizar la siguiente lectura, prestamos atención y anotamos los aspectos más importantes en nuestros cuadernos:

En la vida cotidiana se presentan con mucha frecuencia problemas que se pueden resolver aplicando la teoría de las ecuaciones lineales.

Ejemplo 1:

Manuela ahorra $ 500 cada día, ¿cuánto ahorra en un mes?

Este problema se puede resolver aplicando la regla de tres directa y la equivalencia 1 mes = 30 días:



El ahorro en 30 días resulta de multiplicar 30 días por $ 500,

$$\$\,500 \times 30 = \$\,15\,000$$

Es decir, en 30 días Manuela ahorra $ 15 000.

Otra forma de resolverlo es aplicando la equivalencia entre proporciones, partiendo del hecho que Manuela ahorra $ 500 en un día,

$$\frac{\$\,500}{1} = \frac{\$\,x}{30}$$

Como sabemos, la equivalencia se cumple en la siguiente igualdad:

$$\$\,500\ \cdot 30 = \$\,x\ \cdot 1$$

Y realizando la operación indicada en el lado izquierdo:

$$\$\,15\,000 = \$\,x$$

Esto indica que la cantidad ahorrada x es igual a 15 000, así que la respuesta es igual: En 30 días Manuela ahorra $ 15 000.

Ejemplo 2:

María ha dibujado un rectángulo cuyo largo es tres veces el ancho.
Si el perímetro del rectángulo mide 80 centímetros, ¿cuánto mide el área?

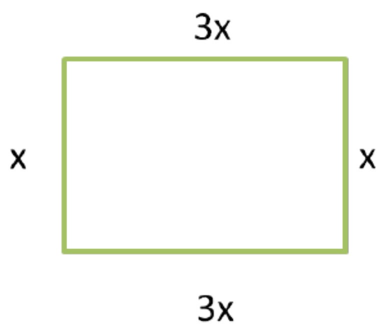
Como no se conoce la medida del largo ni del ancho, entonces la incógnita será x, en este caso el ancho del rectángulo.
Si x es el ancho y el largo es 3 veces el ancho, entonces tendremos:

$$x = \ Ancho$$

$$3x = \ Largo$$

Como sabemos, el perímetro es la suma de los lados, entonces quedaría expresado así:

$$x + 3x + x + 3x$$



Como son términos semejantes, se sumarían y este sería el resultado:

$$8x$$

Si la situación planteada nos dice que el perímetro es de 80 centimetros, entonces, ¿cuál sería el valor de x?

La **ecuación** entonces quedaría representada así:

$$\mathbf{8x = 80}$$

Al resolverla $x = 10$. Entonces largo mide 30 cm y ancho mide 10 cm por lo tanto el area es $30 \cdot 10 = 300\ cm^2$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.
En muchas ocasiones es necesario transformar la ecuación original en una ecuación equivalente y más sencilla de resolver.

Para llevar a cabo esta transformación se deben aplicar las propiedades de la igualdad con las que cuenta el conjunto de los números reales.

En los siguientes ejemplos se muestran los pasos que hay que seguir para resolver una ecuación:

Ejemplo 1:

- Encontrar la solución de la ecuación

$$2 - x = x + 4$$

En primer lugar sumamos x en ambos lados de la ecuación y desarrollamos la suma:

$$2 - x + x = x + 4 + x$$
$$2 = 2x + 4$$

Luego restamos 4 (o sumamos -4) en ambos lados de la ecuación y resolvemos:

$$2 - 4 = 2x + 4 - 4$$
$$-2 = 2x$$

Finalmente, se divide entre 2 para despejar la variable x:

$$\frac{-2}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$-1 = x$$

Es decir, $x = -1$ es la solución de la ecuación $2 - x = x + 4$.

Ejemplo 2:

- Encontrar la solución de la ecuación

$$2x + 3 = 5$$

Para lograr mantener la igualdad restamos a ambos lados la misma cantidad:

$$2x + 3 \mathbf{- 3} = 5 \mathbf{- 3}$$

Se realizan las operaciones correspondientes:

$$\mathbf{2x + 0 = 2}$$

$$\mathbf{2x = 2}$$

Para despejar la variable $\boldsymbol{x}$, el 2 que está multiplicando pasa a dividir al otro lado de la igualdad:

$$x = \frac{2}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Ecuaciones lineales

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que involucra una o más variables y que es verdadera para algunos valores de las variables. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones:

- $3\sqrt{x} - 1 = 7$
- $x + y = z^2$
- $x^2 - y = 0$
- $x^3 + 2x^2 - x = 2$
- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Dependiendo del grado de la ecuación existen diferentes tipos, como son la ecuación lineal, ecuación cuadrática, ecuación cúbica y ecuación de n grado.

Una **ecuación lineal** o de primer grado es una ecuación donde el mayor exponente de las incógnitas es uno y dichas variables se relacionan únicamente mediante la suma o resta. Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales:

- $2x + 1 = -7$
- $\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = 5$
- $-y = x + 3$
- $2 - x = x + 4$
- $x + 2y + 3z = 1$

Las siguientes ecuaciones no son lineales porque su grado mayor no es uno.

Ejemplos:

- $x.y^2 = 1$
- $x^2 = 4$
- $\frac{1}{x} = 2y^2$
- $\sqrt{x} = x + 4$
- $xy + z^2 = 0$

Solución de una ecuación lineal

Las soluciones de una ecuación lineal son los valores reales de las variables para los cuales la igualdad se cumple. Cuando se habla de resolver una ecuación realmente se están buscando sus soluciones.

Ejemplos:

- La solución de la ecuación $2 - x = -3$ es $x = 5$, pues es el único valor real que hace verdadera la igualdad. El conjunto solución es {5}.
- La solución de la ecuación $x + 4 = 14$ es $x = 10$, por ser el único valor real que satisface la igualdad. El conjunto solución es {10}.

Para resolver una ecuación lineal se utilizan los mismos pasos que al resolver una ecuación equivalente.

Ejemplo:

$$x + 9x = 90$$

En primer lugar sumamos los términos semejantes:

$$10\,x = 90$$

Como el 10 está multiplicando a x, entonces debe pasar a dividir al otro lado de la igualdad, así:

$$x = \frac{90}{10}$$

Al simplificar, se obtiene que:

$$x = 9$$

Ecuaciones lineales con una variable

Una ecuación lineal con una variable es una ecuación de la forma

$$ax + b = c$$

Donde a, b, c son números reales y x representa la variable de la ecuación.

Ejemplo 1:

El doble de un número más el triple de su sucesor, más el doble del sucesor de este es 147. Hallar el número.

El doble de un número sería $2x$.

El triple de su sucesor, es decir, $3(x + 1)$.

El doble del sucesor de este es $2(x + 2)$.

$$2x + 3(x + 1) + 2(x + 2) = 147$$

$$2x + 3x + 3 + 2x + 4 = 147$$

Sumamos los términos semejantes, así:

$$7x + 7 = 147$$

$$7x + 7 - 7 = 147 - 7$$

$$7x = 140$$

$$x = \frac{140}{7}$$

$$x = 20$$

Ejemplo 2:

Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 40 m. Calcular la medida del lado del cuadrado.

El lado del cuadrado es x y su perímetro es $4x$.

Si el lado del cuadrado se duplica, sería, $2x$.

Si su perímetro aumenta 40m, seria $(4x + 40)$

La ecuación correspondiente es $2(4x) = 4x + 40$

Luego, $x = 10$.

Ecuaciones lineales con dos variables

Una ecuación lineal con dos variables es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

O una ecuación equivalente a ella; donde a,b y c son números reales mientras que x, y son las variables de la ecuación.

Ejemplo 1:

El área de un jardín es de 120 metros cuadrados. El largo es 8 metros más que dos veces el ancho. ¿Cuál es el largo y el ancho del jardín?

Los valores que no se conocen son el largo y el ancho, por lo tanto se representan así:

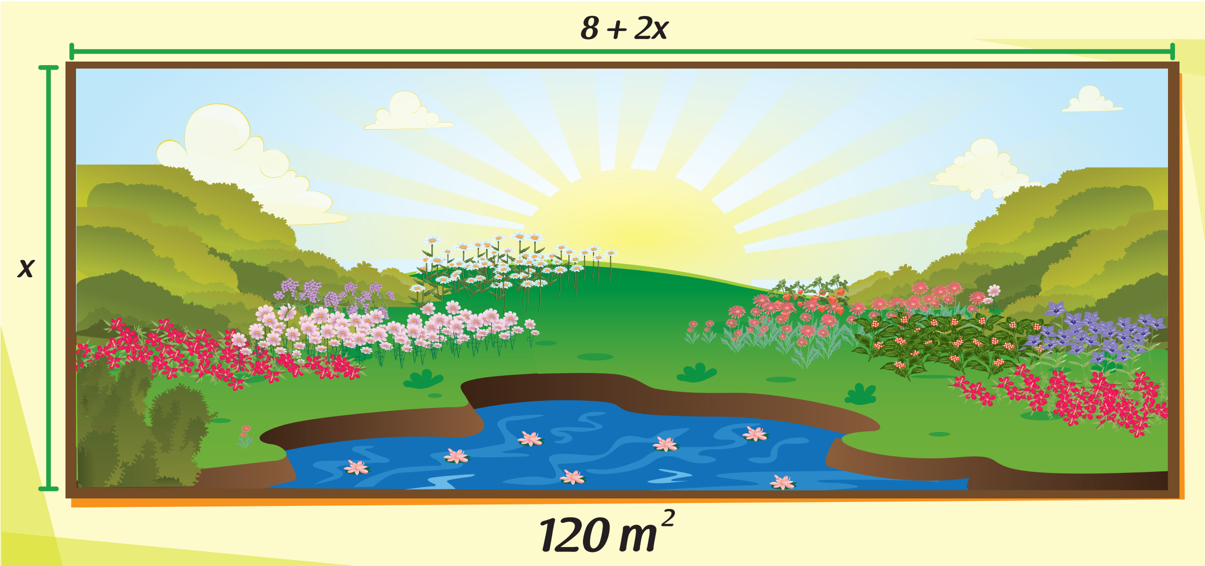
$x =$ Ancho
$y =$ Largo

El área de un jardín es de 120 m, sería

$$x \cdot y = 120$$

El largo es 8 metros más que dos veces el ancho, entonces;

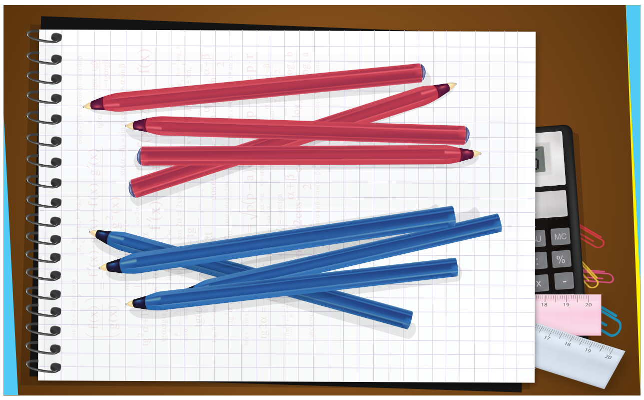
$$y = 8 + 2x$$



Ejemplo 2:

Juan compró lapiceros rojos por $4 000 cada uno y lapiceros azules por $2 800 cada uno. Si Juan compró 24 lapiceros con el costo total de 84 000 pesos, ¿cuántos lapiceros rojos compró?

Se reconoce que hay dos incógnitas, los lapiceros rojos y los lapiceros azules:



$r =$ *Cantidad de lapiceros rojos*

$a =$ *Cantidad de lapiceros azules*

La primera ecuación surge con la expresión "compró 24 lapiceros"

$$\boldsymbol{r + a = 24}$$

Si sabemos que los lapiceros rojos cuestan $4 000 y los lapiceros azules cuestan $ 2 800, además el costo total fue de $ 84 000; entonces tenemos:

$$4\,000\,r + 2\,800a = 84\,000$$

2. Construimos 5 problemas cotidianos que se solucionen planteando ecuaciones lineales con una variable y 5 problemas de la vida diaria que se resuelvan utilizando ecuaciones lineales con dos variables.

3. Discutimos entre los miembros del grupo acerca del punto anterior y solicitamos la presencia de nuestro profesor para que nos aclare las inquietudes presentadas.

C Ejercitación

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Determino y escribo en mi cuaderno cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales y cuáles no, justificando la respuesta:

a. $\frac{4}{x} - 1 = -x$

b. $\frac{x}{4} + 3 = 1 - \frac{x}{6}$

c. $\frac{y+1}{y} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2-y}{3}$

d. $x - 3 = 11 - (x+1)(x-1)$

e. $2y + (4y^2 - 1) = 5(1-y) + 8$

f. $4x - 2\,(6x-5) = 3x + 12\,(2\,x+16)$

g. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{4}x - \frac{x}{3}$

h. $3x - 4y = -17$

i. $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

j. $2x^2 = 6$

2. Encuentro la solución de cada una de las siguientes ecuaciones, resolviéndolas paso a paso:

a. $x - 3 = 11 - x$

b. $3x + 2x = 12 - 7$

c. $\frac{x}{4} - 2 = 5 - x$

d. $\frac{x}{2} + 6 = 2 - \frac{x}{3}$

e. $2y + (1-y) - (3y+1) = 5(1-y) + 8$

f. $4\,(x-3) = 8 - x$

g. $3z - 2 + 4\,(1-z) = 5(1-2z) - 12$

h. $\frac{3}{4}(2x+4) = x + 19$

i. $4\,(x-10) = -6(2-x) - 6x$

TRABAJO EN PAREJAS

3. Comparamos los ejercicios desarrollados en la actividad anterior y construimos acuerdos sobre las respuestas correctas.

4. En nuestros cuadernos, realizamos el siguiente ejercicio uniendo las ecuaciones de la columna A con su ecuación equivalente de la columna B:

Columna A	Columna B
a. $x-5=13-2x$	a. $2x-4=1-x$
b. $x-8=1-x$	b. $x-1=8-x$
c. $x-3=11-x$	c. $x=18-x$
d. $2x+2=20$	d. $3x-7=7+x$
e. $\frac{x-2}{3}=1-x$	e. $x+1=\frac{3-x}{2}$
f. $x+2=20$	f. $x=18-2x$
g. $2x+1=2-x$	g. $2x+1=19+x$
h. $\frac{x+1}{2}=3-x$	h. $x-1=\frac{1}{4}$

5. Invitamos al profesor para que revise los ejercicios desarrollados y le pedimos respetuosamente que nos aclare las dudas, si existen.

D Aplicación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Aplicando lo aprendido acerca de las ecuaciones lineales, resolvemos las siguientes situaciones, copiándolas en nuestro cuaderno y teniendo en cuenta el siguiente procedimiento:

    ✓ Leemos la situación.

    ✓ Elegimos la incógnita o las incógnitas que vamos a emplear en el problema.

    ✓ Traducimos el lenguaje del problema en una ecuación algebraica.

    ✓ Resolvemos las ecuaciones resultantes.

a. Para celebrar el día del amor y la amistad, los estudiantes de 8° del INSTITUTO AFROCOLOMBIANO NELSON MANDELA, desean organizar una convivencia a un resguardo indígena en el Municipio de Riosucio y conforman una comisión para que organice todo lo concerniente al evento.

http://riosucio-caldas.gov.co/apc-aa-files /33353436623566326635363434366464/100_6644.JPG

A la comisión se le han presentado algunas situaciones y para resolverlas necesitan que les ayudemos de la siguiente manera:

Para elegir el coordinador de la actividad han postulado a Carlos y a Fabián Andrés.

Fabián obtuvo 5 votos más que la cantidad de votos que obtuvo Carlos. Si 14 estudiantes de los que votaron por Fabián, hubieran votado por Carlos, se hubiera presentado un empate.

✓ ¿Cuántos votos obtuvo Carlos?

✓ ¿Cuántos votos obtuvo Fabián Andrés?

b. Para transportarse compraron algunos pasajes en un colectivo a $ 4 500 y otros en bus escalera a $ 4 000. Si en total viajaron 38 personas y por todos se pagó $ 166 000:

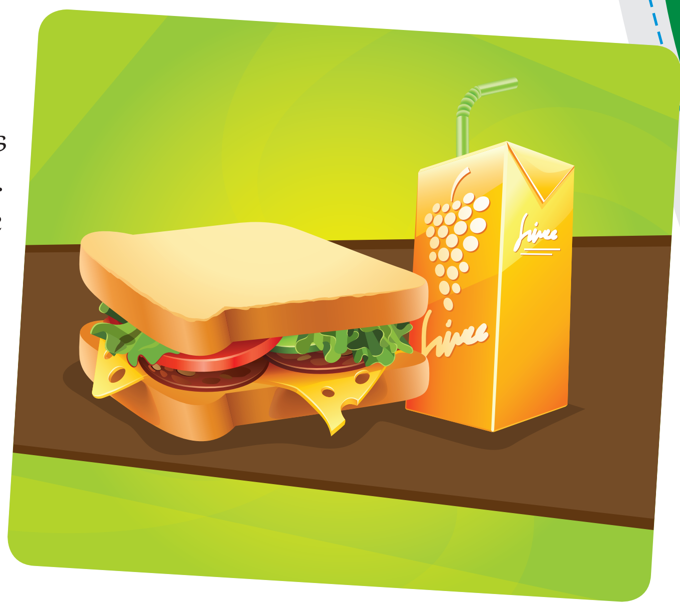
✓ ¿Cuántos viajaron en colectivo?

✓ ¿Cuántos viajaron en bus escalera?

c. Para el almuerzo han programado comer pescado frito y patacones. Para preparar los patacones compran 12 plátanos verdes y 5 plátanos maduros, que cuestan $6 660, posteriormente regresan al mercado y compran 3 plátanos verdes y 3 plátanos maduros por $1 980:

✓ ¿Cuánto cuesta un plátano verde?

✓ ¿Cuánto cuesta un plátano maduro?



d. Para el refrigerio, los organizadores llevan jugos en cajita y sanduches. Luego de entregar a cada uno de los asistentes el refrigerio, quedaron 20 jugos. Uno de los organizadores afirma que $\frac{2}{7}$ de la cantidad de sanduches que compraron es igual a $\frac{1}{6}$ de la cantidad de jugos comprados.

✓ ¿Cuántos jugos se compraron?

✓ ¿Cuántos jugos se prepararon?

2. De acuerdo con la actividad anterior, realizada para celebrar el día del amor y la amistad que se organizó en la institución, respondemos:

   a. ¿De qué manera aplicamos los conocimientos matemáticos aprendidos en esta guía?

   b. ¿Qué pasaría si no supiéramos plantear y resolver ecuaciones lineales, cómo se resolverían las mismas situaciones?

TRABAJO INDIVIDUAL

3. En compañía de mi familia resuelvo las siguientes situaciones, empleando el procedimiento anterior:

   a. El otro día el abuelo de Daniel, que tiene 70 años, quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si les daba $3 000 a cada uno, le sobraba $600 y si les daba $5 000, le quedaban faltando $1 000. ¿Cuántos nietos tiene el abuelo de Daniel? ¿Qué cantidad de dinero quería repartir?

b. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

c. Sabemos que mi tío tiene 27 años más que su hijo y que dentro de 12 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

4. Presento las situaciones resueltas en la plenaria, para que el profesor valore el aprendizaje logrado y nos aclare las dudas que tengamos al respecto.

E Complementación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Leemos con atención, consignamos en el cuaderno los aspectos más importantes y hacemos las gráficas correspondientes, empleando los instrumentos necesarios que podemos obtener en el CRA:

Otra forma de resolver ecuaciones lineales es graficándolas en un plano cartesiano. La gráfica de una ecuación lineal siempre es una recta donde cada punto representa una posible solución para la ecuación de dicha recta.

Si tenemos la siguiente situación:

Ana y Sergio tienen 60 dulces, pero Sergio tiene el doble de dulces que Ana, ¿cuántos dulces tiene cada uno?

Tenemos dos incógnitas, una de ellas la cantidad de dulces de Sergio y otra la cantidad de dulces que tiene Ana:

$x =$ Dulces de Sergio

$y =$ Dulces de Ana

Si entre los dos tienen 60 dulces, entonces ya tenemos la primera ecuación:

$$x + y = 60$$

Si Sergio tiene el doble de dulces que Ana, entonces tenemos:

$$y = 2x$$

$$y - 2x = 0$$

Para resolver la situación mediante el método gráfico, se debe despejar una de las incógnitas, así:

$$x + y = 60$$

$$y - 2x = 0$$

Entonces tendremos,

$$y = 60 - x$$

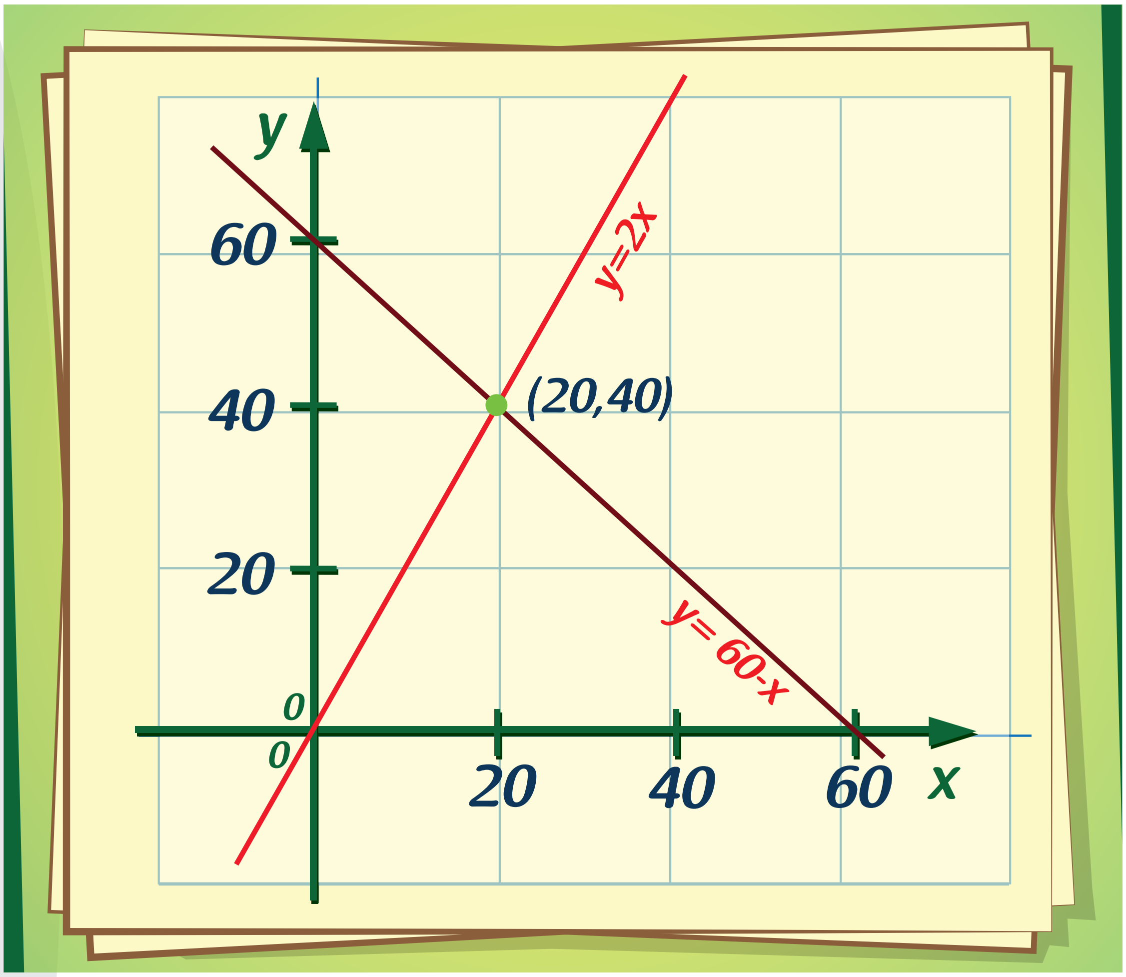
$$y = 2x$$

Ahora elaboramos la tabla de valores para poder graficar:

$y = 60 - x$				
x	0	10	20	30
y	60	50	40	30

$y = 2x$				
x	0	10	20	30
y	0	20	40	30

Con las tablas de valores anteriores, procedemos a graficar:



Entonces, la respuesta es que Sergio tiene 20 dulces y Ana 40. Que corresponde a las coordenadas del punto de intersección (20,40).

2. Elaboramos las gráficas de las siguientes ecuaciones y determinamos el valor del punto de intersección

$$a.\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - 4y = 7 \end{cases} \qquad b.\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Evaluación por competencias

1. ¿Cuál de los siguientes enunciados puede ser solucionado usando ecuaciones lineales con una variable?:

A. Paco y Luisa gastaron $30 000 hace una semana cuando fueron a cine. Hoy gastarán otros $10 000 más porque van a comer. ¿Cuánto gastarán en total?

B. Paco y Luisa gastaron $ 30 000 en el cine hace una semana y les sobró $8 000. ¿Cuánto dinero tenían antes de ir a cine?

C. Paco y Luisa gastaron $30 000 en el cine hace una semana. Cada entrada les costó $9 000. ¿Cuánto gastaron en la gaseosa y las palomitas?

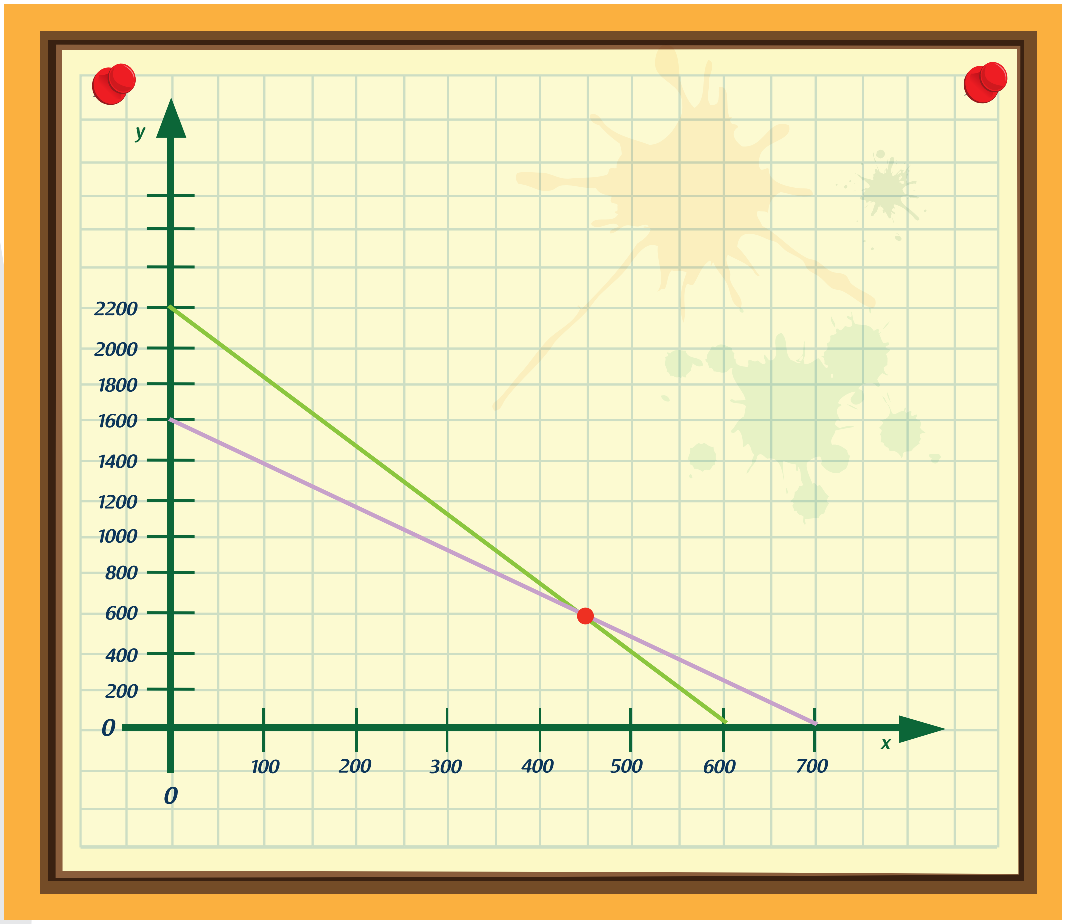
D. Paco y Luisa gastaron $30 000 en el cine. Paco gastó $8 000 más que Luisa. ¿Cuánto gastó cada uno?

1

2. La siguiente gráfica corresponde a una situación en donde se han comprado una cantidad de empanadas a un determinado precio y una cantidad de vasos de gaseosa a otro precio:

El eje x representa la cantidad de empanadas y el eje y representa la cantidad de vasos de gaseosa.

La recta verde corresponde al número de vasos de gaseosa, en función del número de empanadas y el precio total de la compra. La recta lila corresponde al número de vasos de gaseosa, en función del número de empanadas y el precio total de la compra:



De acuerdo con la gráfica, el punto de intersección representa:

A. Que se compraron 450 empanadas y sólo 600 vasos de gaseosa.

B. Que se compraron más empanadas que vasos de gaseosa.

C. Que se compraron igual cantidad de empanadas que vasos de gaseosa.

D. Que se compraron más vasos de gaseosa que empanadas.

2

3. Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

El sistema de ecuaciones que corresponde a esta situación es:

A. $x + y = 168;\ 2x + 4y = 228$

B. $x + y = 58;\ x + y = 168$

C. $x + y = 58;\ 2x + 4y = 168$

D. $x + y = 58;\ 2x + 4y = 228$

3

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, ¿cuál de los siguientes valores para x e y corresponde al conjunto solución?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$$

A. $x = 3\,, y = 4$

B. $x = 5\,, y = 1$

C. $x = 3\,, y = 1$

D. $x = 1\,, y = 2$

4

5. La relación entre la cantidad de boletas para un espectáculo y su costo se representan mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{c = 2500n}$$

¿Cuál de las siguientes tablas representa esta relación?

A.

Cantidad de boletas	Costo
10	25 000
20	50 000
30	75 000
40	100 000

B.

Cantidad de boletas	Costo
10	25 000
20	25 000
30	25 000
40	25 000

C.

Cantidad de boletas	Costo
10	25 000
20	50 000
30	100 000
40	200 000

D.

Cantidad de boletas	Costo
10	25 000
20	27 500
30	30 000
40	32 500

Glosario

- **Ecuación:** Es una igualdad en donde aparecen una o varias incógnitas que son expresadas mediante letras.
- **Ecuaciones equivalentes:** Son aquellas que tienen la misma solución.
- **Ecuación lineal:** Es el conjunto de valores dentro del sistema numérico de los números reales en la que todos sus términos poseen uno como exponente.
- **Sistema de ecuaciones**: Es aquel que está compuesto de dos o más ecuaciones que comparten dos o más incógnitas. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema, se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.
- **Solución de ecuaciones:** Existen tres tipos de soluciones, un solo valor, varios o ninguno. Los valores corresponden a números que satisfacen la ecuación para que sea una igualdad.