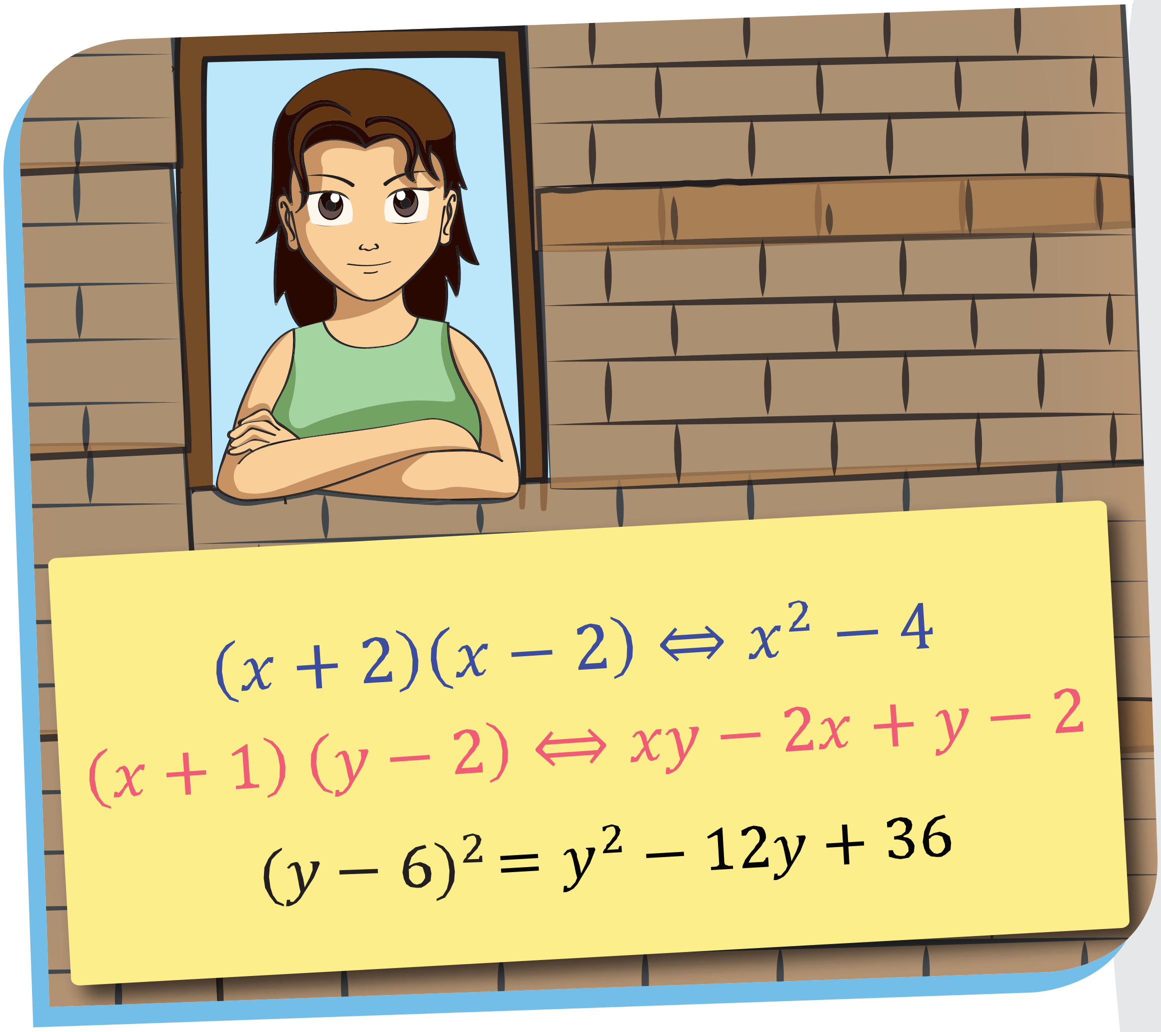
Unidad 2

Mejoremos algunas técnicas algebraicas para dar soluciones a diversas situaciones



Estándares

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

- Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.

- Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas o entrevistas).

Competencias

Matemáticas:

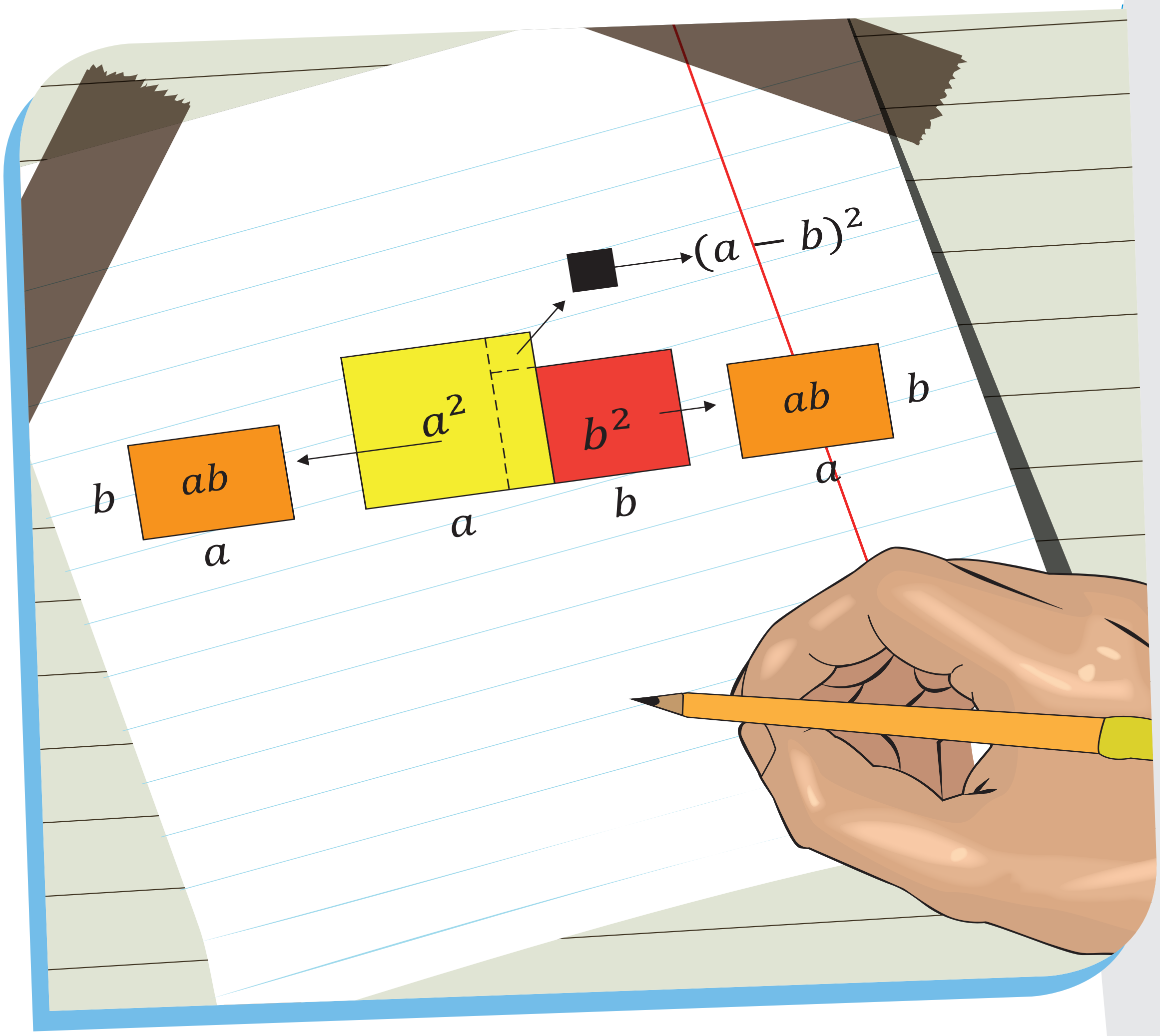
- Resuelvo diferentes situaciones utilizando algunas técnicas algebraicas como productos y cocientes notables, factorización y ecuaciones. Adicionalmente, analizo información a través de algunos datos estadísticos.

Ciudadanas:

- Construyo relaciones pacíficas que contribuyen a la convivencia cotidiana en mi comunidad y municipio.

Guía 1

Calculemos productos y cocientes notables



Indicadores de desempeño

Conceptual

- Reconoce los pasos para calcular resultados de algunos productos o cocientes.

Procedimental

- Ejercita las reglas para calcular productos y cocientes.

Actitudinal

- Planea de manera adecuada las estrategias para la solución de productos y cocientes notables.

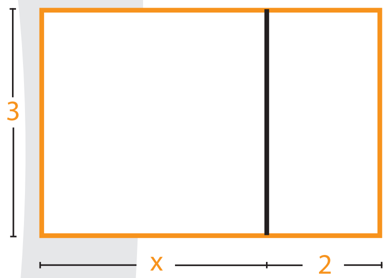
A Vivencia

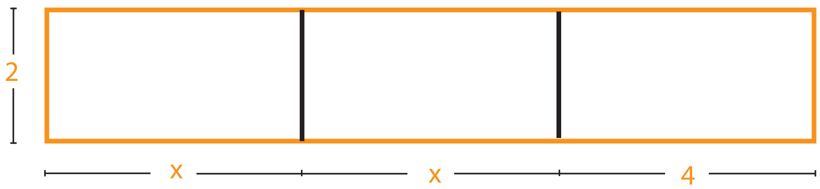
TRABAJO INDIVIDUAL

1. Construyo un cuadrado de 3 cm de lado y un rectángulo de 3 cm de ancho por 5 cm de largo. No olvido utilizar la regla.

2. Si necesitara saber el área del cuadrado y del rectángulo que acabo de construir, ¿cómo la calcularía?

3. Observo las siguientes figuras y calculo su área:

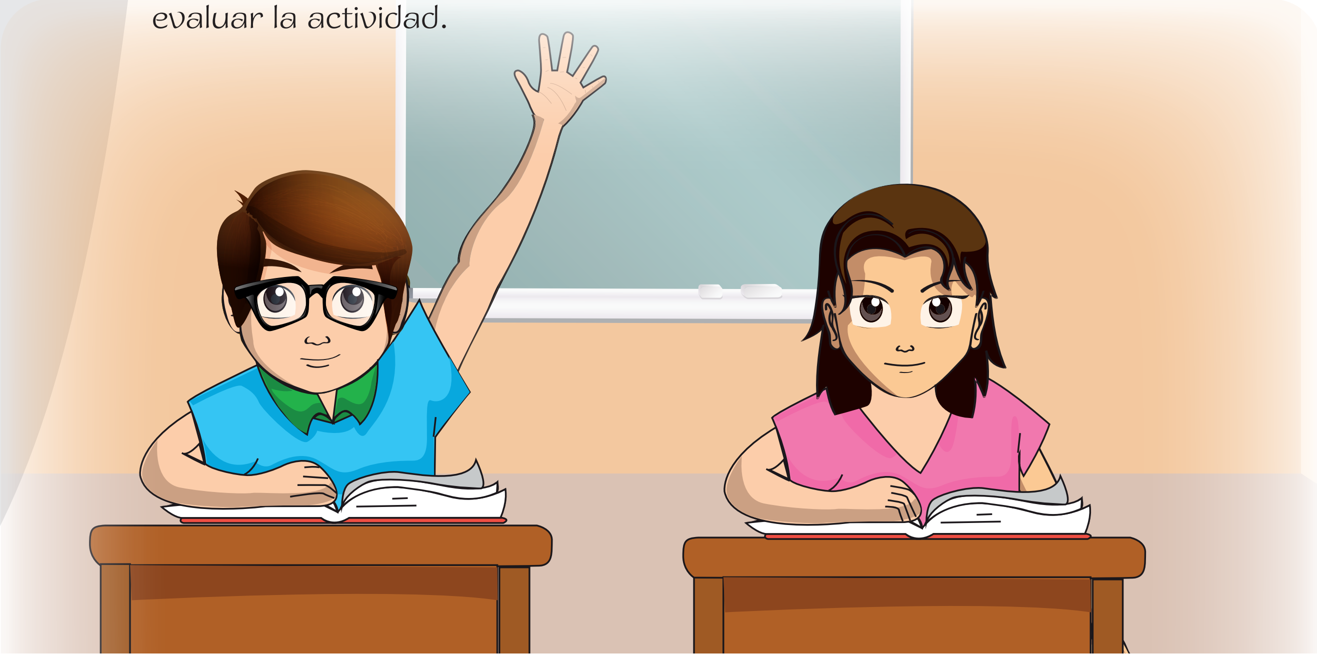




TRABAJO EN PAREJAS

4. Comparamos los ejercicios anteriores, confrontamos las respuestas obtenidas y realizamos correcciones, si es necesario.

5. Invitamos al profesor para mostrarle los resultados y le solicitamos evaluar la actividad.



Fundamentación Científica y Ejercitación

TRABAJO EN EQUIPO

1. Teniendo en cuenta la distribución de roles en el interior del equipo, le solicitamos respetuosamente al líder de este realizar la siguiente lectura, anotamos los aspectos más importantes y resolvemos los ejercicios que se indican:

Productos notables

Un producto notable es una forma de determinar, a partir de unas reglas, el resultado de una multiplicación.

Los productos notables más comunes y utilizados son los que se relacionan con la multiplicación de dos binomios para obtener un trinomio. Los casos que se estudian son:

- El cuadrado de un binomio.
- El producto de una suma por su diferencia.
- El producto de dos binomios de la forma $(x \pm a)\ (x \pm b)$
- Existen otros casos de productos notables cuando se tiene un binomio al cubo.

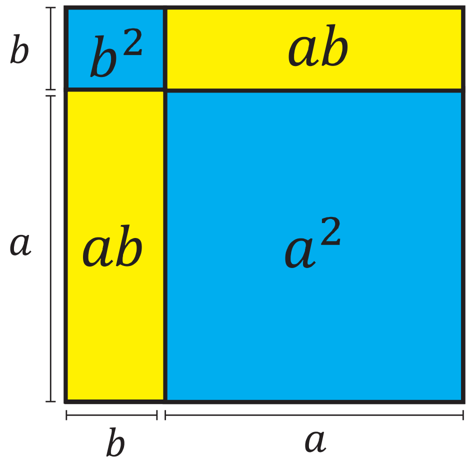
A. Cuadrado de un binomio cuando este representa una suma

Si se tiene $$(a+b)^2$$

Aplicando el concepto de potenciación, sería lo mismo que decir:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Gráficamente, el área de un cuadrado de $a+b$ unidades de lado es igual a sumar el área de un cuadrado de a unidades de lado, con un cuadrado de b de lado y con dos rectángulos de largo a y ancho b .Tal como se representa en la siguiente figura:



Se observa que la figura contiene dos cuadrados de diferentes dimensiones y dos rectángulos iguales

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

Utilizando las propiedades de la multiplicación de polinomios, se puede establecer que:

$$(a+b)\,(a+b) = (a+b)\,a + (a+b)\,b = (aa+ba) + (ab+bb)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Resumiendo:

El cuadrado de un binomio de la suma es igual al cuadrado del primer término, más dos veces el primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término, así:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Primer término — Segundo término

2. *Aplicando lo anterior, resolvemos los siguientes ejercicios y graficamos el cuadrado correspondiente en nuestro cuaderno:*

a. $(2a+3y)^2$

b. $(x+4)^2$

c. $(y+2z)^2$

d. $(a+3b)^2$

e. $(c+2d)^2$

f. $(4b+5c)^2$

g. $(6+m)^2$

h. $(m+n)^2$

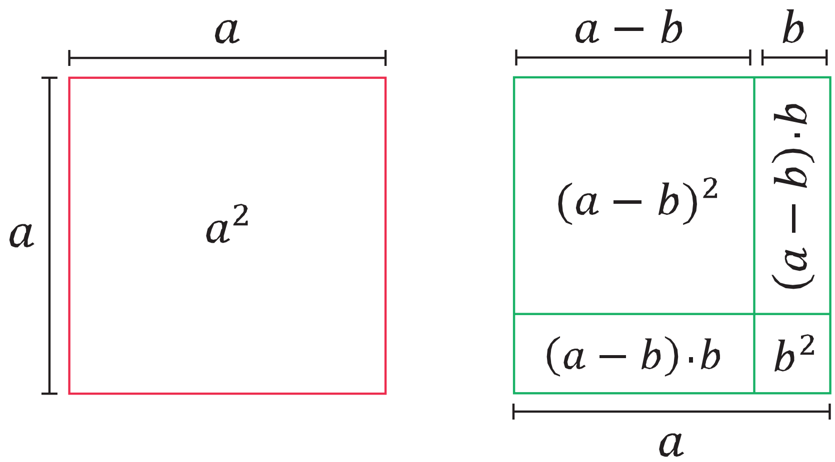
i. $(3b+8c)^2$

j. $(7d+e)^2$

3. *Presentamos al profesor las respuestas a los ejercicios anteriores y si tenemos dudas, le solicitamos que nos las aclare.*

B. Cuadrado de un binomio cuando este representa una resta

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$



Aplicando el mismo procedimiento que se utilizó para el cuadrado de un binomio (suma), se obtiene

$$(a-b)(a-b) = (a-b)a - (a-b)b = (aa-ba) - (ab-bb)$$

Teniendo en cuenta la ley de signos,

$$(a-b)(a-b) = (a-b)a - (a-b)b = (aa-ba) + (-ab+bb)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Resumiendo:

El cuadrado de un binomio de la resta es igual al cuadrado del primer término, menos dos veces el primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término, así :

$$(\underbrace{a}_{\text{Primer término}} - \underbrace{b}_{\text{Segundo término}})^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

4. Resolvemos:

a. $(x-y)^2$

b. $(w-2)^2$

c. $(z-r)^2$

d. $(2s-5r)^2$

e. $(3z-1)^2$

f. $(x-1)^2$

g. $(a-c)^2$

h. $(2x-z)^2$

i. $(xy-z)^2$

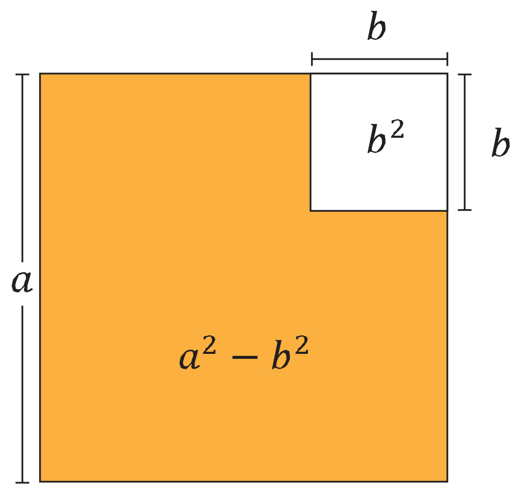
j. $(z-(x-y))^2$

5. Seleccionamos uno de los ejercicios resueltos y se lo presentamos al profesor para que valore nuestros aprendizajes.

C. Producto de la suma por la diferencia

Teniendo en cuenta el binomio $(a+b)$, el producto de la suma por la diferencia es:

$$(a+b)(a-b)$$



Este producto se puede escribir como:

$$(a+b)(a-b)=(a+b)a-(a+b)b=aa+ba-ab-bb.$$

$$=aa+\cancel{ab}-\cancel{ab}-bb=a^2-b^2$$

Porque los términos $ab-ab=0$

Resumiendo:

El producto de la suma por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

En este caso el primer término es a y el segundo término es b:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

6. Hallamos los siguientes productos por simple inspección:

a. $(x+y)(x-y)$

b. $(z+a)(z-a)$

c. $(c+4d)(c-4d)$

f. $(x+2)(x-2)$

g. $(5x+2y)(5x-2y)$

h. $(3y+(-z))(3y-(-z))$

d. $(m+n)(m-n)$

e. $(p+q)(p-q)$

i. $(xy+zw)(xy-zw)$

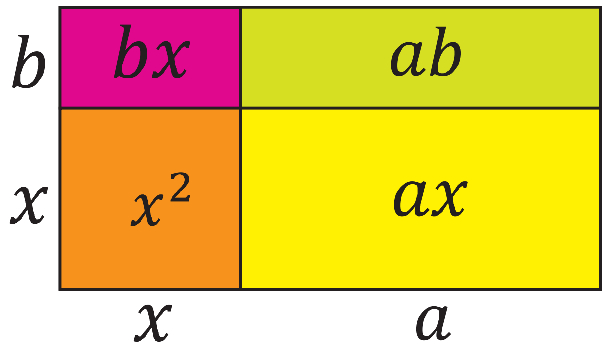
j. $(2a+2b)(2a-2b)$

D. Producto de dos binomios de la forma $(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{b})$

Tomando el producto de dos binomios de la forma

$$(x+a)(x+b)$$

Gráficamente se representa:



$$(x+a)(x+b)$$

Su resultado es:

$$(x+a)(x+b) = (x+a)x + (x+a)b = xx + ax + xb + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Pues $(a+b)x = ax + bx$.

Resumiendo:

El producto de dos binomios de la forma $(x \pm a)(x \pm b)$ es un trinomio cuyo primer término es el producto de los primeros términos de cada binomio. El segundo término tiene como parte literal la raíz cuadrada del primer término de dicho trinomio y como coeficiente la suma algebraica de los segundos términos de cada binomio. El tercer término es el producto de los segundos términos de cada binomio.

Por lo tanto, el producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ es:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplo:

$(x+3)(x+4) = x \cdot x + (3+4)x + 3 \cdot 4 = x^2 + 7x + 12$

7. A continuación resolvemos los siguientes productos:

a. $(x+3)(x+5)$

b. $(x-4)(x+8)$

c. $(x+6)(x-2)$

d. $(w-7)(w-5)$

e. $(2a+3)(a+5)$

f. $(x+6)(3x-5)$

g. $(4b+1)(2b-5)$

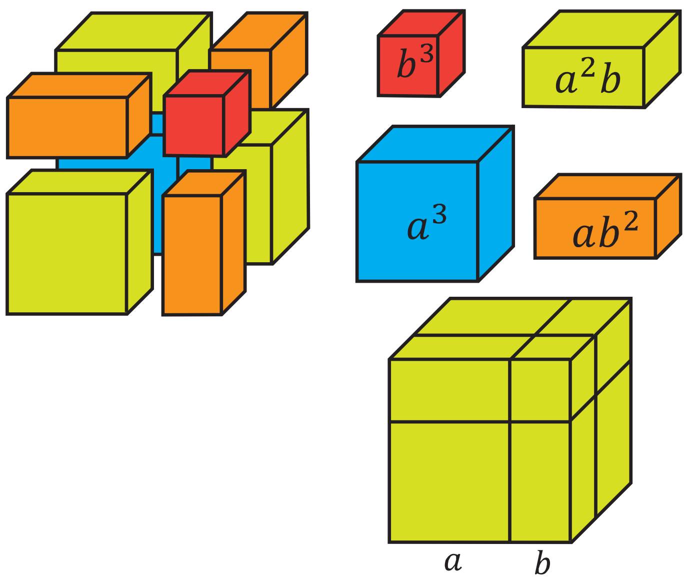
h. $(2x-1)(5x+2)$

E. Cubo de un binomio cuando este es una suma

Para resolver el cubo de un binomio de la forma

$$(a+b)^3$$

Gráficamente se representa así:



$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Se utiliza el mismo procedimiento que para el cuadrado de un binomio, es decir, se expresa el producto

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$

Y como $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, entonces el cubo del binomio es:

$$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b$$

Realizando cada producto y utilizando la conmutatividad del producto

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

Por último, se agrupan los términos semejantes y queda la fórmula general:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Resumiendo:

El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo de la primera cantidad, más tres veces el cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más tres veces la primera cantidad por el cuadrado de la segunda, más la segunda cantidad al cubo, así:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

8. Utilizamos la fórmula anterior para calcular los siguientes ejercicios:

a. $(x+y)^3$
b. $(w+q)^3$
c. $(x+t)^3$
d. $(r+s)^3$
e. $(b+a)^3$
f. $(x+a)^3$
g. $(y+z)^3$
h. $(z+2x)^3$
i. $(3x+2y)^3$
j. $\left(\frac{2p}{5}-\frac{1}{3}\right)$

F. Cubo de un binomio cuando este es una resta

$$(a-b)^3$$

Cuando se habla de una diferencia al cubo, entonces el producto se expresa así:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$$

Y como $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$, entonces el cubo del binomio es:

$$(a+b)^3 = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = (a^2-2ab+b^2)a - (a^2-2ab+b^2)b$$

Realizando cada producto y utilizando la conmutatividad del producto notable

$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

Por último, se agrupan términos semejantes, y queda la fórmula general:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Resumiendo:

El cubo de la diferencia de dos términos es igual al cubo de la primera cantidad, menos tres veces el cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más tres veces la primera cantidad por el cuadrado de la segunda menos la segunda cantidad al cubo, así:

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

9. Utilizando el mismo procedimiento, calculamos los siguientes productos notables:

   a. $(x-y)^3$

   b. $(m-n)^3$

   c. $(3x-3y)^3$

   d. $(2a-4b)^3$

   e. $(y-z)^3$

10. Convocamos respetuosamente al profesor para que evalúe las actividades anteriores.

11. Continuamos con la lectura y resolvemos los ejercicios que se indican:

Cocientes notables

Los cocientes notables son divisiones de términos algebraicos en los que su resultado se puede escribir inmediatamente sin efectuar la división correspondiente.

A. Diferencia de cuadrados entre la suma o la diferencia

Este cociente se escribe generalmente como:

$$\frac{a^2-b^2}{a\pm b}$$

De este cociente se destacan dos casos, en primer lugar

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

Esto equivale a realizar la división $(a^2-b^2)\div(a+b)$

$$\begin{array}{rrr|l}
a^2 & & -b^2 & a+b \\ \cline{4-4}
-a^2 & +b^2 & & a-b \\ \cline{1-3}
 & -ab & -b^2 & \\
 & -ab & -b^2 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Es decir,

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$$

Por otra parte, en el segundo lugar, el cociente

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

Se puede calcular realizando la división que corresponde,

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

12. Verificamos lo anterior realizando la división y hallamos los siguientes cocientes:

a. $\dfrac{m^2 - n^2}{m - n}$

b. $\dfrac{x \;\; - 16}{x + 4}$

c. $\dfrac{u^2 - w^2}{u - w}$

d. $\dfrac{9p^2 - 25q^2}{3p + 5q}$

e. $\dfrac{4y^2 - 25}{2y - 5}$

f. $\dfrac{9x^2 - 4z^2}{3x + 2z}$

g. $\dfrac{(x + y)^2 - z^2}{x + y - z}$

h. $\dfrac{1 - 36x^4}{1 + 6x^2}$

i. $\dfrac{c^4d^2 - 4m^6}{c^2d + 2m^3}$

B. Suma o diferencia de cubos entre la suma o la diferencia

Este cociente se escribe como: $$\frac{a^3 \pm b^3}{a \pm b}$$

De nuevo, en el cociente se destacan únicamente dos casos:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \qquad \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

Efectuando la siguiente división,

$$\begin{array}{rrrr|l}
a^3 & & & +b^3 & a+b \\ \cline{5-5}
-a^3 & -a^2b & & & a^2 - ab + b^2 \\ \cline{1-2}
 & -a^2b & & & \\
 & a^2b & +ab^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & ab^2 & +b^3 & \\
 & & -ab^2 & -b^3 & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & -0 &
\end{array}$$

Se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$$

Mientras que para el cociente

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

Efectuando la división, se obtiene:

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

13.Desarrollamos la división del cociente anterior y calculamos los siguientes cocientes:

a. $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$

b. $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

c. $\dfrac{8y^3+1}{2y+1}$

d. $\dfrac{27x^3+y^6}{3x+y^2}$

e. $\dfrac{x^3y^3-z^3}{xy-z}$

f. $\dfrac{64x^6-y^6}{2x-y}$

g. $\dfrac{8v^3+27w^6}{2v+3w^2}$

h. $\dfrac{216+x^3}{6+x}$

Resumen

Para calcular los cocientes de la forma, tenga en cuenta:

$\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$	$\dfrac{a^n-b^n}{a+b}$
- El cociente tiene tantos términos como lo indique n, sea n par o impar. - Todos los signos del cociente son positivos. - El primer término del cociente es a^{n-1} - El último término del cociente es b^{n-1} - Los exponentes de a, a partir de a^{n-1} disminuyen de 1 en 1, mientras los de b aumentan de 1 en 1.	- El cociente tiene tantos términos como lo indique n, sólo si n es par o impar. - Todos los signos del cociente van alternando empezando con positivo, sigue negativo y así sucesivamente. - El primer término del cociente es a^{n-1} - El último término del cociente es b^{n-1} - Los exponentes de a, a partir de a^{n-1} disminuyen de 1 en 1, mientras los de b aumentan de 1 en 1.
Ejemplo: $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$	Ejemplo: $\dfrac{m^4-n^4}{m+n}=m^3-m^2n+mn^2-n^3$

$\dfrac{a^n + b^n}{a - b}$	$\dfrac{a^n + b^n}{a + b}$
ESTE NO ES UN COCIENTE NOTABLE PARA n, PAR O IMPAR.	- El cociente tiene tantos términos como lo indique n, sólo si n es impar. - Si n es par, NO ES COCIENTE NOTABLE. - Todos los signos del cociente van alternando empezando con positivo, sigue negativo y así sucesivamente. - El primer término del cociente es a^{n-1} - El último término del cociente es b^{n-1} - Los exponentes de a, a partir de a^{n-1} disminuyen de 1 en 1, mientras los de b aumentan de 1 en 1.
	Ejemplo: $\dfrac{m^5 + n^5}{m + n} = m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$

14. Resolvemos los siguientes cocientes notables:

a. $\dfrac{a^6 - b^6}{a - b}$

b. $\dfrac{m^8 - n^8}{m + n}$

c. $\dfrac{p^{12} - q^{12}}{p - q}$

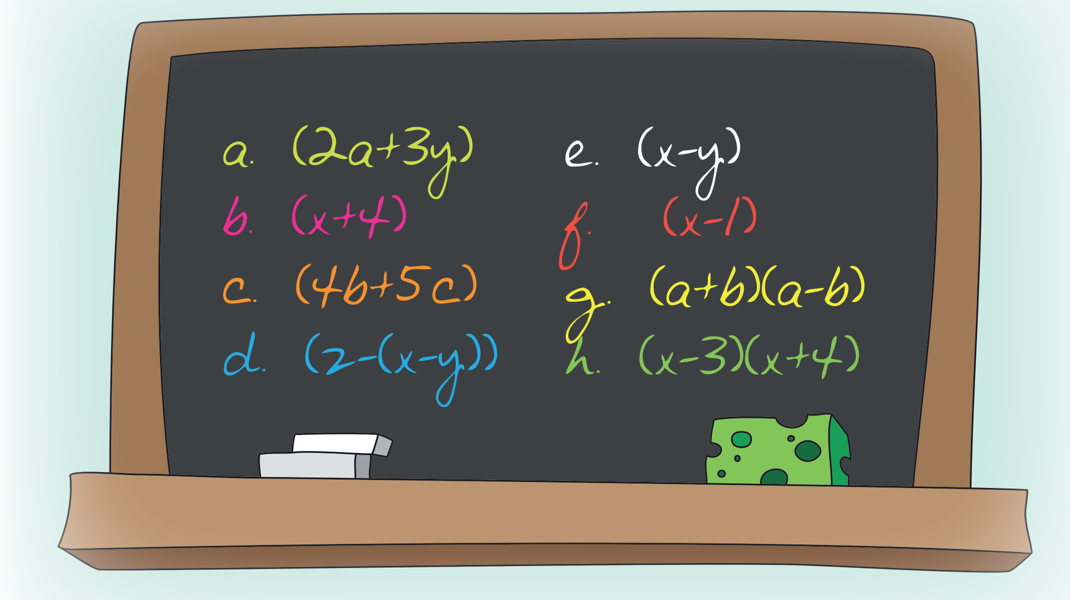
d. $\dfrac{x^{10} - y^{10}}{x - y}$

e. $\dfrac{s^6 - t^6}{s + t}$

f. $\dfrac{a^7 - m^7}{a - m}$

g. $\dfrac{a^9 + c^9}{a + c}$

15. Le solicitamos al profesor evaluar los ejercicios resueltos y corregimos, si es necesario.

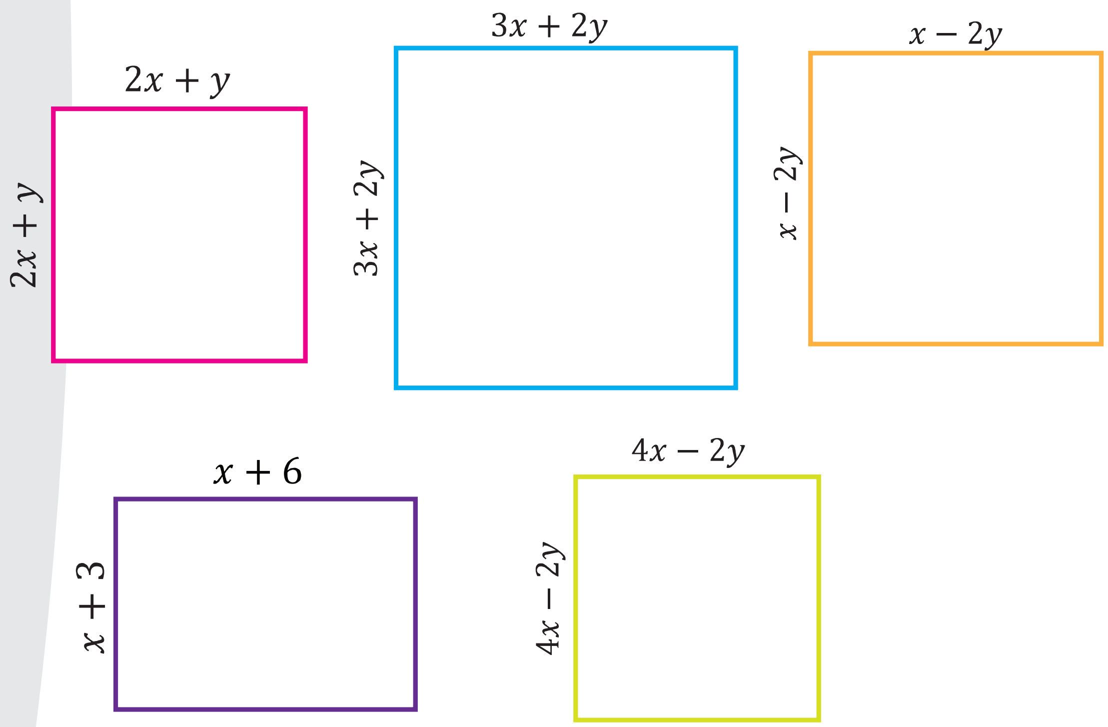


D Aplicación

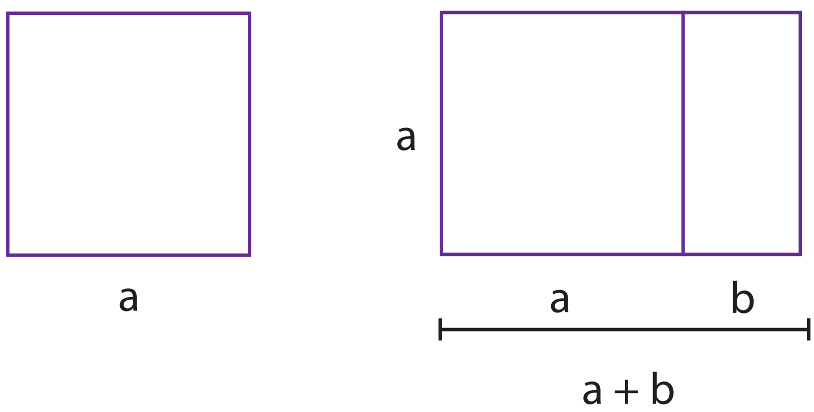
TRABAJO INDIVIDUAL

1. Resuelvo las siguientes situaciones:

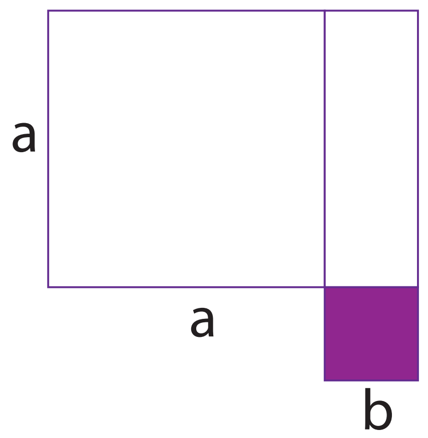
   a. En una finca se construyeron parcelas, cuyas dimensiones se dan a continuación. Indicamos el producto notable que representa cada una de ellas:



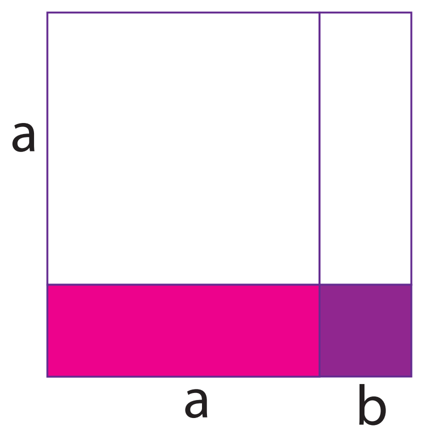
   b. Fabio quiere construir una piscina de forma cuadrada en su casa, que tiene de lado *a metros*. Al cabo de un tiempo decide ampliarla *b* metros, tal como se observa en la figura:



Más tarde construye unos baños en la parte baja del rectángulo



Finalmente construye sauna y jacuzzi sobre la parte rectangular que queda después de hacer los baños :



Determino el área de la piscina en los tres casos anteriores, aplicando los productos notables.

E Complementación

TRABAJO EN PAREJAS

1. Leemos con atención el siguiente texto acerca del **Triángulo de Pascal** y consignamos el resumen de lo leído:

El triángulo de Pascal (o de Tartaglia), es un triángulo de números infinito que está relacionado con los coeficientes de alguna potencia de un binomio.

Este se construye verticalmente desde arriba hacia abajo, partiendo de un triángulo de “unos”, como se ve en la figura; en la primera fila sólo hay un “uno” y en la segunda fila dos “unos”:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}}$$

La tercera fila se forma sumando los “unos” del segundo renglón, y en los extremos se ubican los “unos”:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 \quad & 1+1 & \quad 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

Los números de la siguiente fila se obtienen sumando los números consecutivos del tercer renglón, es decir 1+2 y 2+1, de nuevo en los extremos se ubican “unos”:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 1+2 & & 2+1 & & 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Las siguientes filas se obtienen realizando el mismo procedimiento, la siguiente figura muestra los primeros 10 renglones del triángulo de Pascal:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

La relación del triángulo con los coeficientes resultantes de una potencia de un binomio es la siguiente:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

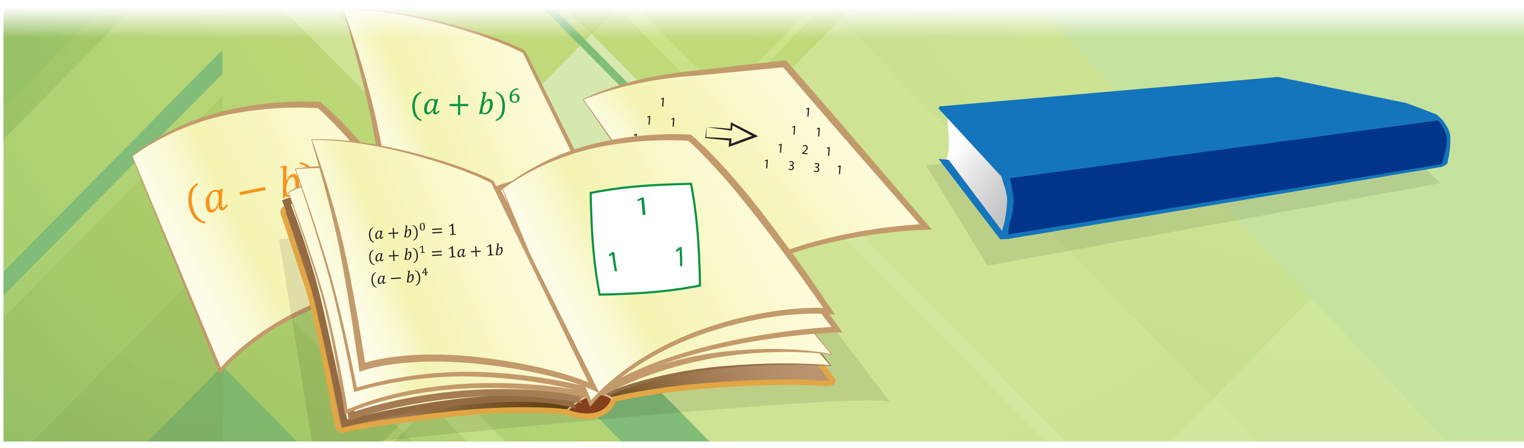
Y así sucesivamente.

2. Teniendo en cuenta el triángulo de Pascal, resolvemos los siguientes ejercicios:

a. $(a+b)^6$

b. $(a-b)^4$

c. $(a-b)^8$



Evaluación por competencias

1. ¿Qué producto notable nos da como resultado un trinomio cuadrado perfecto?:

A. El cubo de un binomio.

B. El cuadrado de un binomio.

C. El área de un cuadrado.

D. El producto de dos binomios.

1

2. Relaciono cada producto con su resultado por simple inspección:

A. $(x+3)^2$	( ) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
B. $(x-2)(x+2)$	( ) $x^2 - 4$
C. $(x-3)(x-4)$	( ) $9x^2 - 4$
D. $(x-1)^3$	( ) $x^2 + 6x + 9$
E. $(3x-2)(3x+2)$	( ) $x^2 - 7x + 12$

2

3. ¿Cuál es el producto notable que se representa en la siguiente gráfica? Argumento mi respuesta:

A. $(x + a)(x + b)$

B. $(x + y)^2$

C. $(x - y)(x + y)$

D. $(x - y)^2$

3

4. El resultado del cociente notable $\dfrac{4x^2 - 121}{2x + 11}$ es:

A. $2x^2$- 11

B. x^2 - 11

C. 2x – 11

D. 2x - 121

4

5. Completo la siguiente afirmación con alguna de las opciones:
El Triángulo de Pascal permite ___________________________

A. Llegar a generalizaciones de productos notables.

B. Ahorrar tiempo para realizar operaciones.

C. Es una manera de factorizar.

D. Es una manera de hallar cocientes notables.

5

Glosario

- **Cocientes notables:** Son aquellos en los que se puede escribir su desarrollo sin efectuar la división. Se caracterizan por ser siempre cocientes exactos, es decir, igual a cero.

- **Producto notable:** Es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación, que cumple ciertas reglas fijas. Su aplicación simplifica y sistematiza la resolución de muchas multiplicaciones habituales.

- **Triángulo de Pascal:** Es un conjunto infinito de números enteros ordenados en forma de triángulo. Es llamado así en honor al matemático francés Blaise Pascal, quien introdujo esta notación en 1654, en su Traité du trianglearithmétique.

- **Triángulo de Tartaglia:** Es una colección de números dispuestos en forma triangular. Es más conocido como el Triángulo de Pascal.